



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ENERGETICKÝ ÚSTAV

ENERGY INSTITUTE

NUMERICKÉ ŘEŠENÍ DYNAMIKY KAVITAČNÍ BUBLINY

NUMERICAL SOLUTION OF THE CAVITATION BUBBLE DYNAMICS

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Filip Münster

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Pavel Rudolf, Ph.D.

BRNO 2018

Zadání diplomové práce

Ústav: Energetický ústav
Student: **Bc. Filip Münster**
Studijní program: Strojní inženýrství
Studijní obor: Fluidní inženýrství
Vedoucí práce: **doc. Ing. Pavel Rudolf, Ph.D.**
Akademický rok: 2017/18

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Numerické řešení dynamiky kavitační bubliny

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Dynamika osamoceně kavitační bubliny je popsána Rayleigh–Plessetovou rovnicí (případně jejími modifikacemi), jejíž řešení je možné pouze numerickými metodami. Z hlediska využití hydrodynamické kavitace pro ničení mikroorganismů je důležité modelování chování kavitační bubliny vzniklé za kontrakcí proudu (např. Venturiho trubice, clona), tj. určení pohybu hranice bubliny a určení vlastních frekvencí. Pro eliminaci sinic je navíc důležité určit chování plynových měchýřků uzavřených tenkou elastickou membránou.

Cíle diplomové práce:

1. Rešerše modifikací Rayleigh–Plessetovy rovnice pro popis kavitační bubliny
2. Rešerše metod pro numerické řešení Rayleigh–Plessetovy rovnice, resp. jejích modifikací
3. Numerické řešení osamoceně kavitační bubliny v proměnném tlakovém poli, určení vlastních frekvencí
4. Numerické řešení chování osamoceně kavitační bubliny při průchodu kontrakcí
5. Numerické řešení chování plynového měchýřku v proměnném tlakovém poli
6. Zhodnocení, závěr

Seznam doporučené literatury:

BRENNEN, C.E. Cavitation and Bubble Dynamics. New York: Oxford University Press, 1995. ISBN 0195094093.

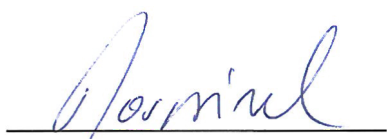
FRANC, J.P. a J.M. MICHEL. Fundamentals of Cavitation. Springer, 2006. ISBN 978-1-4020-2233-3.

WALSBY, A.E. Gas vesicles. Microbiological reviews. 1994, 58(1), 94-144.

LIU, Y. a Q. WANG. Stability and natural frequency of nonspherical mode of an encapsulated microbubble in a viscous liquid. Physics of fluids. 2016, 28, 20.

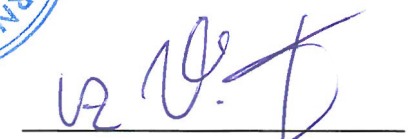
Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2017/18

V Brně, dne 28. 10. 2017



doc. Ing. Jiří Pospíšil, Ph.D.
ředitel ústavu





doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

ABSTRAKT

Tato práce se zabývá numerickým řešením dynamiky kavitační bubliny a chováním plynového měchýřku sinice. Je vytvořen program pro numerický výpočet dynamiky bublin pomocí Rayleigh-Plessetovy rovnice a jejích modifikací. Následně jsou zkoumány bubliny různých velikostí při různých budících frekvencích při akustické kavitaci. Dále je vytvořen model pro hydrodynamickou kavitaci. Tento model kombinuje CFD výpočet proudění ve Venturiho dýze s výpočtem dynamiky kavitační bubliny. Poslední část se zabývá chováním plynových měchýřků sinic v proměnném tlakovém poli a při průchodu Venturiho dýzou.

Klíčová slova

kavitační bublina, Rayleigh-Plessetova rovnice, plynové měchýřky, sinice

ABSTRACT

This thesis deals with the numerical solution of cavitation bubble dynamics and with cyanobacteria gas vesicle behaviour. A program for the numerical calculation of bubble dynamics is created using the Rayleigh-Plesset equation and its modifications. Subsequently, bubbles of different sizes are investigated during acoustic cavitation with various driving frequencies. Furthermore, a model for hydrodynamic cavitation is created. The model combines CFD computation of flow in the Venturi nozzle with the cavitation bubble dynamics calculation. The last part of the work is dedicated to cyanobacteria gas vesicle behaviour in a variable pressure field and during passage through the Venturi nozzle.

Keywords

cavitation bubble, Rayleigh-Plesset equation, gas vesicles, cyanobacteria

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

MÜNSTER, F. Numerické řešení dynamiky kavitační bubliny. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2018. 77 s. Vedoucí diplomové práce doc. Ing. Pavel Rudolf, Ph.D.

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma **Numerické řešení dynamiky kavitační bubliny** vypracoval samostatně s použitím odborné literatury a pramenů, uvedených v seznamu, který tvoří přílohu této práce.

25. května 2018

.....

Bc. Filip Münster

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji panu doc. Ing. Pavlu Rudolfovi, Ph.D. za odborné vedení této práce, jeho cenné rady a připomínky a za jeho čas, který mi věnoval při konzultacích. Také chci poděkovat své rodině a především mé Marušce za podporu při vypracování této práce i během celého mého studia.

Obsah

ÚVOD	11
1 Rayleigh-Plessetova rovnice	13
1.1 Okrajové a počáteční podmínky	13
1.2 Odvození Rayleigh-Plessetovy rovnice	15
1.3 Rayleighův čas	15
1.4 Vlastní frekvence bubliny	15
1.5 Podmínky uvnitř bubliny	16
1.5.1 Tlak uvnitř bubliny	16
1.5.2 Teplota uvnitř bubliny	16
2 Modifikace Rayleigh-Plessetovy rovnice	17
2.1 Herringův model	17
2.2 Gilmorův model	18
2.3 Keller-Miksisův model	19
2.4 Tomita-Shima model	19
3 Mikrobubliny s membránou	21
3.1 Vlastnosti plynových měchýřků sinic	21
3.1.1 Mechanické vlastnosti plynových měchýřků	23
3.2 Model pro mikrobubliny s membránou	23
3.3 Vlastní frekvence mikrobubliny s membránou	24
4 Numerické metody pro řešení RP rovnice	25
4.1 Počáteční problém pro ODR	25
4.2 Eulerovy metody	26
4.2.1 Explicitní Eulerova metoda	26
4.2.2 Implicitní Eulerova metoda	27
4.2.3 Lichoběžníková metoda	27
4.3 Runge-Kuttovy metody	28
4.3.1 Bogacki-Shampine metoda	29
4.3.2 Dormand-Prince metoda	30
4.4 Adams-Bashforth-Moultonova metoda	31
4.5 Metody pro řešení tuhých problémů	31
5 Bublina v proměnném tlakovém poli	33
5.1 Výběr numerické metody	33
5.2 Skokové zvýšení tlaku	36
5.3 Periodická změna tlaku	38
5.3.1 Porovnání RP rovnice a jejích modifikací	38
5.4 Dynamika osamocené kavitace bubliny	41
5.4.1 Tvary oscilace bubliny	41
5.4.2 Kmitání při různých budicích frekvencích	42
5.4.3 Závislost maximálních hodnot na budicí frekvenci	45
6 Bublina při průchodu Venturiho dýzou	47
6.1 CFD výpočet proudění ve Venturiho dýze	47

6.1.1	Použité modely	48
6.2	Výsledky řešení	51
6.2.1	Disipovaná energie	55
6.2.2	Skutečná trajektorie bubliny	56
7	Plynový měchýřek v proměnném v tlakovém poli	59
7.1	Plynový měchýřek při průchodu Venturiho dýzou	61
	ZÁVĚR	63
	SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ	65
	SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ	68
	SEZNAM OBRÁZKŮ	71
	SEZNAM TABULEK	71
	SEZNAM PŘÍLOH	72

ÚVOD

Kavitací je nazýván jev, při kterém dochází ke vzniku a zániku kavitačních bublin – dutin v kapalině, latinsky *cavitas*. Tyto bubliny jsou naplněny parami kapaliny, plynem, nebo obojím. Kavitace je důsledkem poklesu tlaku v kapalině za konstantní teploty k hodnotě tlaku nasycených par při příslušné teplotě.

Rozlišují se dva druhy kavitace. Prvním je *hydrodynamická kavitace*, která nastává změnou podmínek v kapalině – zvýšení rychlosti proudění, např. při proudění skrz Venturiho dýzu, v úzkých průchodech (clony, ventily), nebo kolem lopatek hydraulických strojů. Druhým typem je *akustická kavitace*. Ta vzniká vyvoláním tlakových změn akustickým polem, užitím ultrazvukových generátorů.

Kavitace je v technické praxi dlouhodobý problém. Již v roce 1895 se ukázala jako problém u lodních šroubů. Kromě negativních účinků, jako poškození materiálu kavitační erozí nebo hluku, má kavitace i pozitivní využití. Tím je například průmyslové čištění povrchu materiálů, odplyňování kapalin, dezintegrace suspenzí, čištění odpadních vod a v neposlední řadě dezintegrace mikroorganismů. Kavítaci lze také využít při dopravě léčiv pomocí mikrobublin s membránou. [2, 3, 5, 6, 7]

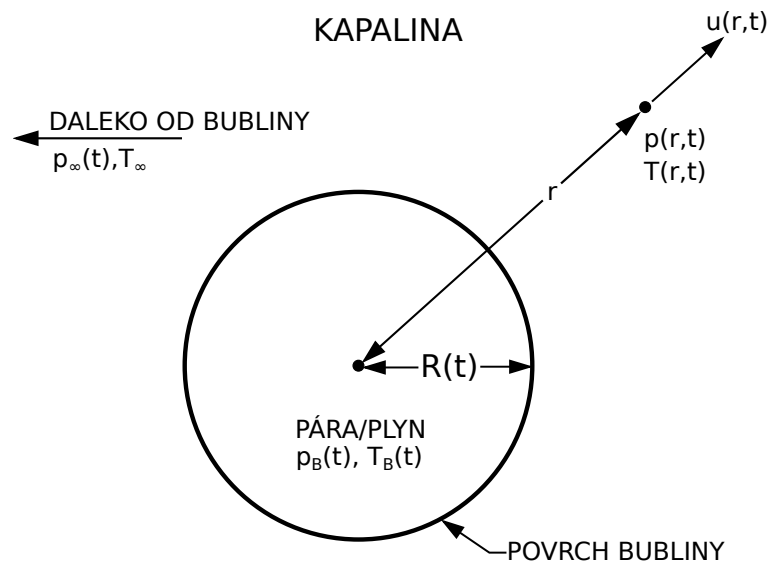
Prvním, kdo se teoreticky zabýval chováním bublin v kapalině byl Rayleigh (1917), který odvodil rovnici pro rychlost částic nekonečně rozlehlé kapaliny, která obklopuje bublinu kulového tvaru. V roce 1954 Plesset tuto rovnici rozšířil o viskózní účinky a povrchové napětí. [2, 5]

Tato práce se zabývá numerickým řešením dynamiky kavitační bubliny a bubliny obklopené tenkou membránou, pomocí Rayleigh-Plessetovy rovnice a jejích modifikací. Řešení je uskutečněno jak pro akustickou kavítaci, tak pro kavítaci při průchodu Venturiho dýzou.

1 Rayleigh-Plessetova rovnice

Rayleigh-Plessetova rovnice je odvozena za těchto předpokladů: Je uvažována kulová bublina o poloměru $R(t)$, kde t je čas. Bublina se nachází v nekonečně rozlehlé kapalině o konstantní teplotě T_∞ a proměnném tlaku $p_\infty(t)$. Kapalina je nestlačitelná a gravitace je zanedbána. Teplotní gradienty a vnitřní zdroje tepla nejsou uvažovány. Naopak tlak $p_\infty(t)$ je známý a přímo ovlivňuje růst a kolaps bubliny. Dále hustota kapaliny ρ_L a její dynamická viskozita μ_L jsou považovány za konstantní. Také se předpokládá, že bublina je vyplněna plynem nebo sytou parou kapaliny a její rozložení je v objemu bubliny homogenní a teplota $T_B(t)$ a tlak $p_B(t)$ uvnitř bubliny jsou v celém objemu stejné. [1]

Výsledkem výpočtu je poloměr bubliny $R(t)$. Jak je znázorněno na obr. 1.1, vzdálenost od středu kulové bubliny v radiálním směru je značena r . S tou souvisí radiální rychlost povrchu $u(r, t)$, tlak $p(r, t)$ a teplota $T(r, t)$.



Obrázek 1.1: Schéma kulové bubliny v nekonečně rozlehlé kapalině [1, upraveno]

Následující kapitoly 1.1 a 1.2 čerpají z [1] a [2].

1.1 Okrajové a počáteční podmínky

Pro odvození RP rovnice je nutné zavést okrajové podmínky na povrchu bubliny. Jelikož je přenos hmoty přes rozhraní bubliny zanedbáván, rychlost kapaliny na rozhraní $u(R, t)$ je rovna rychlosti rozhraní $\dot{R} = dR/dt$.

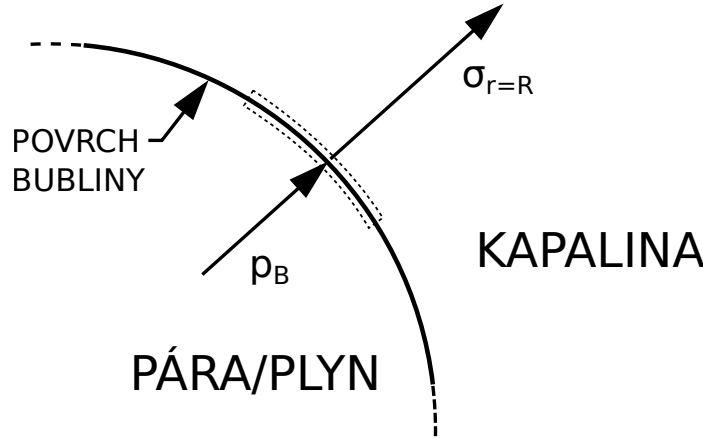
Bude uvažován kontrolní objem, tvořený malou, nekonečně tenkou vrstvou, obsahující část rozhraní (obr. 1.2). Rovnováha tlaků působících na tuto vrstvu v radiálním směru je:

$$\sigma_n(R, t) + p_B - \frac{2\sigma}{R} = 0, \quad (1.1)$$

kde $\sigma_n(R, t)$ je normálové napětí na rozhraní, p_B tlak uvnitř bubliny a $\frac{2\sigma}{R}$ tlak od povrchového napětí.

Normálové napětí je dáno vztahem (1.2):

$$\sigma_n(R, t) = -p(R, t) + 2\mu_L \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R}, \quad (1.2)$$



Obrázek 1.2: Detail povrchu kulové bubliny [1, upraveno]

kde $p(R, t)$ je tlak na rozhraní bubliny a μ_L je dynamická viskozita kapaliny. Poslední člen této rovnice představuje vztah pro smykové napětí a pro $r = R$ se po derivaci dostane v tomto tvaru:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R} = -\frac{2\dot{R}}{R} \quad (1.3)$$

Pro tlak p_B uvnitř bubliny platí:

$$p_B = p_v + p_g(t), \quad (1.4)$$

kde p_v je tlak sytých par při dané teplotě a $p_g(t)$ je parciální tlak plynu uvnitř bubliny. Jeho okamžitá hodnota je vztažena k hodnotě na počátku a je dána následujícím vztahem:

$$p_g(t) = p_{g0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\kappa} \quad (1.5)$$

Tento vztah bude odvozen v kapitole 1.5. Předpokládá se, že v bublině probíhá adiabatický děj. V mocnině tedy vystupuje Poissonova konstanta κ , která je definována jako poměr tepelných kapacit plynu při stálém tlaku a objemu c_{pg}/c_{vg} .

Z rovnice (1.2) je za využití rovnic (1.1), (1.3), (1.4) a (1.5) vyjádřen tlak působící na rozhraní kavitační bubliny:

$$p(R, t) = p_v + p_{g0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\kappa} - \frac{2\sigma}{R} - 4\mu_L \frac{\dot{R}}{R} \quad (1.6)$$

Ve velké vzdálenosti od bubliny se předpokládá, že je kapalina v klidu, tedy $u(\infty, t) \rightarrow 0$ a tlak $p(\infty, t)$ (jinak značeno $p_\infty(t)$) je znám.

Pro počáteční podmínky, kdy se předpokládá, že bublina je v rovnováze ($R = R_0$) a rychlost jejího povrchu je nulový ($\dot{R}(0) = 0$), platí následující rovnice:

$$p_{\infty 0} = p_{g0} + p_v - \frac{2\sigma}{R_0}, \quad (1.7)$$

kde $p_{\infty 0}$ je počáteční tlak daleko od bubliny, který je znám. Z rovnice (1.7) lze vyjádřit vztah pro výpočet počátečního parciálního tlaku plynu uvnitř bubliny:

$$p_{g0} = p_{\infty 0} - p_v + \frac{2\sigma}{R_0} \quad (1.8)$$

1.2 Odvození Rayleigh-Plessetovy rovnice

Ze zákona zachování hmoty pro nestlačitelnou kapalinu vyplývá:

$$u(r, t) = \dot{R} \frac{R^2}{r^2}, \quad (1.9)$$

V tomto konkrétním případě je viskózní člen z Navier-Stokesovy rovnice nulový. Proto pohybová rovnice má tvar:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho_L} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (1.10)$$

Dosazením rovnice (1.9) do (1.10) se dostane pohybová rovnice v následujícím tvaru:

$$\ddot{R} \frac{R^2}{r^2} + 2\dot{R}^2 \left[\frac{R}{r^2} - \frac{R^4}{r^5} \right] = -\frac{1}{\rho_L} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (1.11)$$

Integrací podle poloměru v intervalu od R po ∞ a uvažováním podmínek v nekonečnu ($p = p_\infty$ pro $r = r_\infty$) se získá vztah:

$$\frac{p(r, t) - p_\infty(t)}{\rho_L} = \ddot{R} \frac{R^2}{r} + 2\dot{R}^2 \left[\frac{R}{r} - \frac{R^4}{4r^4} \right] \quad (1.12)$$

Na rozhraní bubliny, kde $r = R$, se z rovnice (1.12) dostane:

$$\frac{p(R, t) - p_\infty(t)}{\rho_L} = R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \quad (1.13)$$

Dosazením rovnice (1.6) do rovnice (1.13) se získá obecná Rayleigh-Plessetova rovnice (1.14):

$$\rho_L \left[R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right] = p_v - p_\infty(t) + p_{g0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\kappa} - \frac{2\sigma}{R} - 4\mu_L \frac{\dot{R}}{R} \quad (1.14)$$

Řešením této rovnice je průběh poloměru $R(t)$ při zadaném $p_\infty(t)$. Vynecháním povrchového napětí a viskózního členu se získá rovnice, jak ji odvodil Rayleigh (1917). Plesset (1949) rovnici (1.14) poprvé aplikoval na problém pohybujících se kavitačních bublin.

1.3 Rayleighův čas

Rayleighův čas, τ , je charakteristický čas prvního kolapsu bubliny, při užití Rayleigh-Plessetovy rovnice. Kolaps bubliny je stav, kdy $R \rightarrow 0$ a $\dot{R} \rightarrow \infty$. Rayleighův čas je dán vztahem (1.15): [2]

$$\tau = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\rho_L}{p_\infty - p_v}} \int_0^{R_0} \frac{dR}{\sqrt{\frac{R_0^3}{R^3} - 1}} \cong 0,915 R_0 \sqrt{\frac{\rho_L}{p_\infty - p_v}} \quad (1.15)$$

1.4 Vlastní frekvence bubliny [15]

Díky elastickému chování nekondenzujících plynů uvnitř bubliny se bublina chová jako oscilátor, který má určitou vlastní frekvenci. Předpokladem je, že tlak p_∞ osciluje kolem rovnovážného tlaku $p_{\infty 0}$ s úhlovou rychlostí ω a malou amplitudou δp podle vztahu $p_\infty = p_{\infty 0} + \delta p \sin \omega t$. Rayleigh-Plessetova rovnice může být potom zapsána v tomto tvaru:

$$\rho_L \left[R\ddot{R} + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \right] = -\delta p \sin \omega t + p_{g0} \left[\left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\kappa} - 1 \right] + 2\sigma \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R} \right) - 4\mu_L \frac{\dot{R}}{R} \quad (1.16)$$

Nahrazením $\delta R = R - R_0$ namísto R , lze předchozí rovnici linearizovat a získat vztah (1.17):

$$\rho_L R_0 \delta \ddot{R} + 4\mu_L \frac{\dot{\delta R}}{R_0} + \left(3\kappa p_{g0} - \frac{2\sigma}{R_0}\right) \frac{\delta R}{R_0} \cong -\delta p \sin \omega t \quad (1.17)$$

Odtud se získá vztah pro vlastní frekvenci bubliny jako nuceného harmonického oscilátoru:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi R_0} \sqrt{\frac{1}{\rho_L} \left[3\kappa p_{g0} - \frac{2\sigma}{R_0}\right]} \quad (1.18)$$

1.5 Podmínky uvnitř bubliny

Ze známého poloměru bubliny v čase $R(t)$ lze dopočítat tlak p_B a teplotu T_B uvnitř bubliny. Jak bylo uvedeno výše, předpokládá se, že uvnitř kulové bubliny probíhá adiabatický děj.

1.5.1 Tlak uvnitř bubliny

Při výpočtu tlaku uvnitř bubliny se vyjde z rovnice adiabaty: [21]

$$pV^\kappa = \text{konst.}, \quad p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa, \quad \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^\kappa, \quad (1.19)$$

kde indexy 1, 2 označují počáteční a koncový stav plynu. Dosazením vztahu pro objem koule ($V = \frac{4}{3}\pi R^3$) do rovnice (1.19) a vyjádřením p_2 se získá vztah (1.20):

$$p_2 = p_1 \left(\frac{\frac{4}{3}\pi R_1^3}{\frac{4}{3}\pi R_2^3}\right)^\kappa = p_1 \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{3\kappa}. \quad (1.20)$$

Přepsáním indexů je získána rovnice (1.21) pro tlak plynu uvnitř bubliny:

$$p_B(t) = p_{B0} \left(\frac{R_0}{R(t)}\right)^{3\kappa} \quad (1.21)$$

Stejným způsobem je odvozen vztah pro parciální tlak plynu uvnitř bubliny (1.5).

1.5.2 Teplota uvnitř bubliny

Aby bylo možné z rovnice adiabaty získat rovnici pro teplotu uvnitř bubliny, je nutné nejprve znát vztah mezi teplotou, objemem a tlakem. Tyto stavové veličiny jsou dány stavovou rovnicí ideálního plynu: [21]

$$pV = mrT, \quad \rightarrow \quad \frac{pV}{T} = mr = \text{konst.}, \quad (1.22)$$

kde m je hmotnost a r měrná plynová konstanta. Úpravami této rovnice se získá mezi těmito veličinami vztah pro stav 1 a 2:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{p_2 T_1}{p_1 T_2}. \quad (1.23)$$

Tento vztah je následně dosazen do rovnice (1.19) a po úpravě a přepsání indexů je získána rovnice pro výpočet teploty uvnitř bubliny:

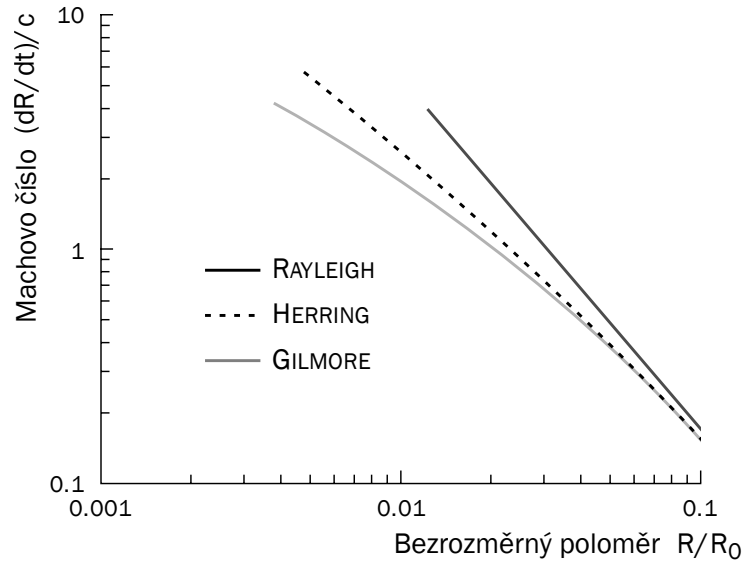
$$T_B(t) = T_{B0} \left(\frac{R_0}{R(t)}\right)^{(3\kappa-3)} \quad (1.24)$$

2 Modifikace Rayleigh-Plessetovy rovnice

Rayleigh-Plessetova rovnice je odvozena pro nestlačitelnou kapalinu, pro kterou platí, že rychlost zvuku v této kapalině c je nekonečně velká. Ovšem pro velké rychlosti, řádově srovnatelné s rychlostí zvuku, nemůže být stlačitelnost kapaliny ignorována, jelikož má velký vliv na konečné stádium kolapsu bubliny. [23]

Herring (1941) zavedl korekci prvního řádu pro stlačitelnost kapaliny za předpokladu, že Machovo číslo ($Ma = \dot{R}/c_\infty$) je mnohem menší než 1. Gilmore (1952) odvodil model, který zahrnuje stlačitelnost okolního média a předpokládá, že rázové vlny se v kapalině šíří rychlostí zvuku. Dále byla odvozena řada dalších modifikací Rayleigh-Plessetovy rovnice. Z těchto dalších modelů je níže uveden Keller-Miksisův (1980) a Tomita-Shima (1977). [1, 2, 17]

Na obr. 2.1 a 2.2 jsou znázorněny výsledky Herringa (1941) a Gilmora (1952) v porovnání s Rayleigh-Plessetovou rovnicí. Lze vidět, že se zmenšujícím se poloměrem roste Machovo číslo při kolapsu bubliny a naopak stlačitelnost kapaliny rychlost kolapsu snižuje.



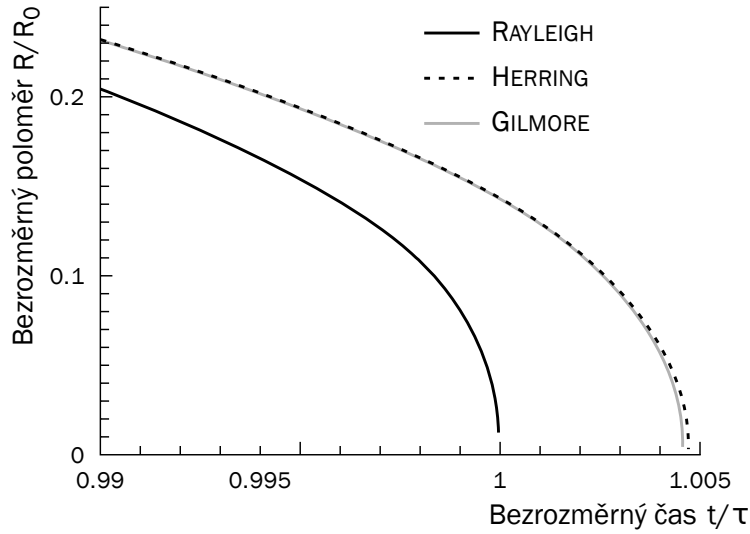
Obrázek 2.1: Závislost Machova čísla při kolapsu bubliny na jejím poloměru. Porovnání Gilmorova, Herringova a Rayleigh-Plessetova modelu.[2]

2.1 Herringův model

Tento model je zobecněním Rayleigh-Plessetovy rovnice, který zahrnuje nízkou stlačitelnost kapaliny. Rychlost zvuku v kapalině se předpokládá, že je konstantní, tj. $c = c_\infty = konst.$ Tento model platí pouze pro nižší rychlosti \dot{R} . Pokud rychlost \dot{R} dosáhne řádově stejné velikosti jako rychlost zvuku c , stává se tento model nedostačující, z důvodu velkého nárůstu chyby. Pohybová rovnice má následující tvar: [14, 23]

$$\ddot{R}R \left(1 - 2\frac{\dot{R}}{c_\infty}\right) + \frac{3}{2}\dot{R}^2 \left(1 - \frac{4}{3}\frac{\dot{R}}{c_\infty}\right) = \frac{1}{\rho_L} \left[P - p_\infty(t) + \frac{R}{c_\infty}\dot{P} \left(1 - \frac{\dot{R}}{c_\infty}\right) \right], \quad (2.1)$$

kde $P \equiv p(R, t)$ je tlak působící na rozhraní bubliny, dán vztahem (1.6). Lze vidět, že pro $c_\infty \rightarrow \infty$ se rovnice (2.1) zredukuje na Rayleigh-Plessetovu rovnici (1.14). [2, 14]



Obrázek 2.2: Čas kolapsu bubliny pro Gilmoreův, Herringův a Rayleigh-Plessetův model. [2]

V této rovnici vystupuje i derivace tlaku na povrchu bubliny podle času. Tato rovnice pro \dot{P} má tvar:

$$\dot{P} = -3\kappa p_{g0} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{2\kappa} R_0 \frac{\dot{R}}{R^2} + 2\sigma \frac{\dot{R}}{R^2} - 4\mu_L \frac{\ddot{R}R - \dot{R}^2}{R^2} \quad (2.2)$$

Herringův model je vhodný pro malé a střední amplitudy oscilace bublin $A_B \leq 4,5$, kde A_B je definováno jako poměr maximálního (R_{max}) a počátečního (R_0) poloměru bubliny, zatímco Rayleighův model je vhodný pro $A_B \leq 2$. [14]

2.2 Gilmoreův model

Gilmoreův model je vhodný i pro největší amplitudy oscilace bubliny. Je druhého řádu přesnosti. V tomto modelu není rychlost zvuku c v kapalině považována za konstantní, ale mění se s tlakem podle vztahu (2.3):

$$c = c_\infty \left(\frac{p + B}{p_\infty(t) + B} \right)^{\frac{n-1}{2n}}, \quad (2.3)$$

kde B a n jsou konstanty z Taitovy stavové rovnice pro kapalinu. [14]

Taitova stavová rovnice je definována následovně:

$$\frac{p + B}{p_0 + B} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n, \quad (2.4)$$

kde $1/nB$ je součinitel stlačitelnosti definovaný jako $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp}$. Pro vodu mají konstanty hodnotu: $B = 304,9$ MPa a $n = 7,15$. [2]

Další veličina, která v tomto modelu vystupuje, je rozdíl entalpií kapaliny při tlaku p a $p_\infty(t)$ při izoentropickém ději. Tento rozdíl se rovná:

$$h = \frac{1}{\rho_L} \frac{n}{n-1} (p_\infty(t) + B) \left[\left(\frac{p + B}{p_\infty(t) + B} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right] \quad (2.5)$$

Na rozhraní bubliny ($r = R$) se dosadí do rovnic (2.3) a (2.5) tlak $p = P$. Potom se c a h označí jako C a H . Gilmorova rovnice má následující tvar: [14]

$$\ddot{R}R \left(1 - \frac{\dot{R}}{C} \right) + \frac{3}{2} \dot{R}^2 \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\dot{R}}{C} \right) = H \left(1 + \frac{\dot{R}}{C} \right) + \frac{R}{C} \dot{H} \left(1 - \frac{\dot{R}}{C} \right), \quad (2.6)$$

kde vztah pro entalpii zderivovaný podle času bude vypadat následovně:

$$\begin{aligned} \dot{H} = & \frac{1}{\rho_L} \frac{n}{n-1} \dot{p}_\infty(t) \left[\left(\frac{P + B}{p_\infty(t) + B} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right] + \\ & + \frac{1}{\rho_L} (p_\infty(t) + B) \frac{\dot{P}(p_\infty(t) + B) - \dot{p}_\infty(t)(P + B)}{(p_\infty(t) + B)^2} \left(\frac{P + B}{p_\infty(t) + B} \right)^{-\frac{1}{n}} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Pro malé odchylky P od $p_\infty(t)$ se z (2.6) stane rovnice, která se od (2.1) liší pouze počtem korekčních výrazů $(1 - \dot{R}/c_\infty)$. [14]

2.3 Keller-Miksisův model

Tento model zahrnuje stlačitelnost a viskozitu okolní kapaliny, šíření zvuku a povrchové napětí. Je vhodný i pro velké amplitudy budícího tlaku. Pohybová rovnice tohoto modelu je následující: [17, 22]

$$\left(1 - \frac{\dot{R}}{C} \right) R \ddot{R} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\dot{R}}{3C} \right) \dot{R}^2 = \frac{1}{\rho_L} \left(1 + \frac{\dot{R}}{C} \right) [P - p_\infty(t)] + \frac{R}{\rho_L C} \dot{P} \quad (2.8)$$

2.4 Tomita-Shima model

Model Tomita-Shima je, stejně jako výše uvedené modely, odvozený pro kulovou bublinu ve viskózní stlačitelné kapalině. Zohledňuje hustotu plynu uvnitř bubliny a účinky stlačitelnosti kapaliny na změnu poloměru bubliny, rychlost jejího povrchu a tlaku na povrchu bubliny. Tento model je druhého řádu přesnosti: [17, 23]

$$\begin{aligned} & \left[1 - 2 \frac{\dot{R}}{C} + \frac{23}{10} \left(\frac{\dot{R}}{C} \right)^2 \right] R \ddot{R} + \frac{3}{2} \left[1 - \frac{4}{3} \frac{\dot{R}}{C} + \frac{7}{5} \left(\frac{\dot{R}}{C} \right)^2 \right] \dot{R}^2 = \\ & = \frac{P - p_\infty(t)}{\rho_L} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{P - p_\infty(t)}{\rho_L C^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{R}}{C} \right)^2 \right] + \left(1 - 2 \frac{\dot{R}}{C} \right) \frac{R}{\rho_L C} \dot{P} \end{aligned} \quad (2.9)$$

3 Mikrobubliny s membránou

V předchozích dvou kapitolách byly uvedeny pohybové rovnice pro kulové bubliny, jejichž rozhraní je tvořeno pouze povrchovým napětím. Tato část se bude zabývat bublinami, ve kterých je plyn obklopen navíc tenkou elastickou membránou.

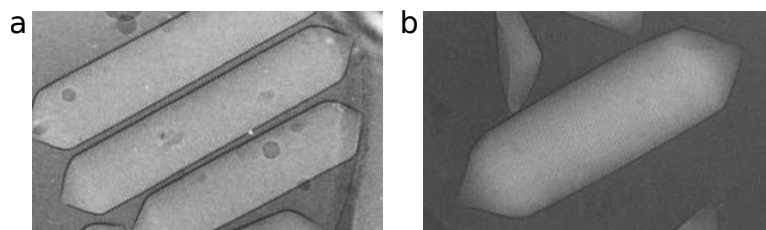
Mikrobubliny s membránou lze využít například v lékařství jako tzv. ultrazvukové kontrastní prostředky (UKP). Lze je využít například k dopravě léčiv a genů, nebo v sonografii, kdy pomáhají vylepšit kontrast krevních cév. Typickým UKP je plynová bublina o průměru 1 až 5 μm obalená membránou. Membrána může být vyrobena z albuminu, lipidu, nebo polymeru. Nízká hustota a vysoká stlačitelnost plynového jádra dovolí bublině oscilovat a to vede k unikátní nelineární charakteristice. Díky ní které je možné UKP odlišit od okolní tkáně. Jakmile UKP dorazí po nitrožilní injekci na určené místo v těle, je pomocí řady ultrazvukových pulzů s tlakovou amplitudou v řádu megapascalů docíleno akustické kavitace a intenzivní oscilace, nebo rozpadnutí UKP. Tímto je léčivo, které může být umístěno buďto uvnitř UKP a nebo připojeno k jeho povrchu, uvolněno na určeném místě. Kolabující UKP může také vylepšit propustnost tenkých cév. [4, 16]

Další oblastí, kde se objevují bubliny obklopené membránou, jsou sinice. Ty jsou dobře známými producenty toxinů a mohou být vysoce toxické pro široké spektrum organismů, včetně člověka. Buňky sinic obsahují plynové měchýřky, které jim umožňují regulovat jejich vertikální pozici v kapalině. Tyto měchýřky jsou vyplněny plynem a jejich stěna je tvořena proteinem *GvpA*, který tvoří jednovrstevnou stěnu. [3, 18, 19]

Existuje několik způsobů, jak snížit množství sinic ve vodních nádržích. Nejlepším řešením by bylo omezení přísunu živin sinic. To je ovšem pro povrchové vody téměř nemožné. Nejběžnější metodou ničení sinic je aplikace chemikálií. Ty ale mají negativní dopad i na ostatní organismy ve vodě. Jiným způsobem může být nasazení ryb, živcůch se sinicemi. Další možností je fyzikální ošetření vody za využití kavitace. Při kavitaci jsou sinice a jejich plynové měchýřky vystaveny vysokým tlakům a teplotám a tím dojde k jejich zničení. Je dokázáno, že k ničení plynových měchýřků sinic je účinná jak akustická, tak hydrodynamická kavitace. Experimentálně zjištěná účinnost hydrodynamické kavitace se pohybuje od 47,86 do 97,19 % pro 1–18 kavitačních cyklů. [18]

3.1 Vlastnosti plynových měchýřků sinic [3]

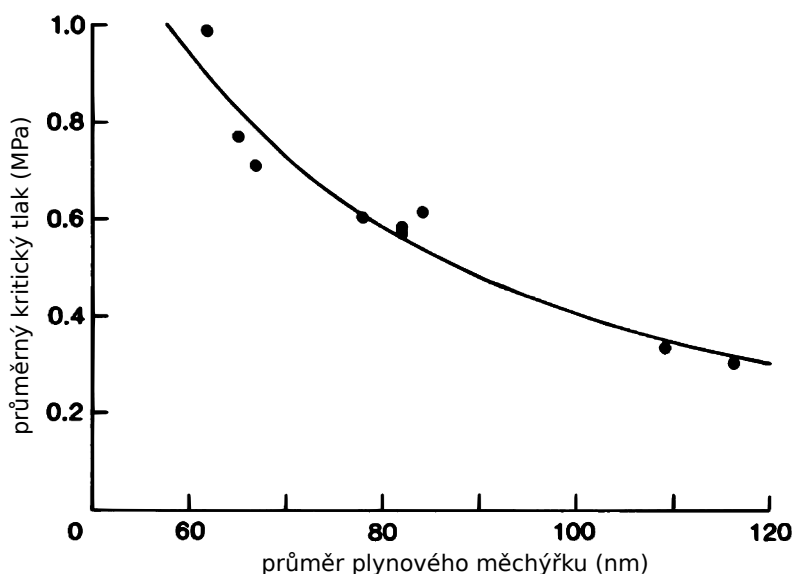
Plynové měchýřky sinic, především druhu *Microcystis aeruginosa*, který je v ČR velmi rozšířený, mají tvar dutých válců s kónickými konci. Každý druh sinic má typický průměr těchto válců, ale jejich délka se pohybuje v rozmezí 100 až 800 nm nebo více pro každý druh. Plynové měchýřky zachycené elektronovým mikroskopem jsou zobrazeny na obr. 3.1.



Obrázek 3.1: Snímky plynových měchýřků z elektronového mikroskopu (zvětšení 150 000 \times). **a** *Anabaena flos-aquae*, **b** *Halobacterium salinarum* [20]

Plynové měchýřky mají tuhou strukturu, která podléhá malému zmenšení objemu při relativně malém zvýšení tlaku, ale při vysokých tlacích dojde k jejich prasknutí. Všechny základní vlastnosti, které poskytuje prostor naplněný plynem – zejména vztlak, jsou prasknutím měchýřků ztraceny. Kritický tlak se pro různé organismy výrazně liší. Jedná se o nejmenší možný rozdíl tlaků uvnitř a vně plynového měchýřku, při kterém dojde ke kolapsu.

Jeho hodnota se pohybuje od 0,1 MPa u halobakterie do 3,5 MPa u oceánických sinic *Trichodesmium thiebautii* a je závislá na průměru měchýřků. Tato závislost je vyobrazena na obr. 3.2. V tabulce 3.1 jsou uvedeny hodnoty kritického tlaku a tlaku uvnitř měchýřků vybraných druhů sinic.



Obrázek 3.2: Závislost kritického tlaku na průměru plynového měchýřku [3]

Tabulka 3.1: Kritický tlak a tlak uvnitř plynových měchýřků vybraných druhů sinic. [3]

Druh sinice	Kritický tlak p_c (MPa)	Tlak uvnitř plynového měchýřku p_{pm} (MPa)
<i>Anabaena flos-aquae</i>	0,60	0,43
<i>Dactylococcopsis salina</i>	0,33	0,08
<i>Microcystis sp.</i>	0,76	0,32
<i>Oscillatoria agardhii</i>	0,99	0,38

Průměr plynových měchýřků lze stanovit pomocí elektronového mikroskopu měřením zkolabovaných měchýřků. Pro různé sladkovodní sinice se průměr pohybuje od 62 nm pro sinice *Oscillatoria agardhii* do 84 nm u sinic *Anabaena flos-aquae*. Plynové měchýřky ještě většího průměru byly nalezeny u dvou halofilických sinic – 109 nm (*Dactylococcopsis salina*) a 117 nm (*Aphanothece halophytica*). Naopak nejmenší měchýřky, 45 nm, byly nalezeny u oceánického druhu *Trichodesmium thiebautii*.

Tloušťka stěny může být analyzována například pomocí rentgenové krystalografie. Pro sinice *Halobacterium halobium* je tloušťka stěny 2 nm a pro *Anabaena flos-aquae* 1,95 nm.

3.1.1 Mechanické vlastnosti plynových měchýřků

Stlačitelnost plynového měchýřku je určena dvěma elastickými vlastnostmi proteinu, který tvoří stěnu: modul pružnosti v tahu E a Poissonova konstanta ν . Pro protein plynových měchýřků sinic *Microcystis* je hodnota $E = 3,8$ GPa. O něco nižší hodnota, 2,8 GPa, byla zjištěna pro sinice *Anabaena*. Hodnota Poissonovy konstanty není známá. Walsby [3] navrhuje použití hodnoty $\nu = 0,33$ jako hodnoty obvyklé pro běžné materiály.

3.2 Model pro mikrobubliny s membránou

V modelu, popisujícím dynamiku bubliny s membránou, musí být zahrnuty i vlastnosti membrány. Těmito vlastnostmi jsou tloušťka membrány ($\delta_S = R_{20} - R_{10}$), její hustota ρ_S , modul pružnosti ve smyku G_S a viskozita μ_S . Dále zde vystupuje i modul pružnosti ve smyku pro prostředí, ve kterém se bublina nachází G_L . Pokud bublina osciluje v Newtonské kapalině, $G_L = 0$. Pro jiná prostředí, například měkkou tkáň v těle, je G_L nenulový.

Výpočet tlaku a teploty vychází v tomto případě z van der Waalovy stavové rovnice. Vztah pro $p_g(t)$ a T_B má tento tvar: [16]

$$p_g(t) = \left(p_{\infty 0} + \frac{2\sigma_1}{R_{10}} + \frac{2\sigma_2}{R_{20}} \right) \left[\frac{1}{\left(\frac{R_1}{R_{10}} \right)^3 - \frac{b}{V_m}} \right]^\kappa \quad (3.1)$$

$$T_B = \frac{T_{\infty 0}}{\left[\left(\frac{R_1}{R_{10}} \right)^3 - \frac{b}{V_m} \right]^{\kappa-1}}, \quad (3.2)$$

kde b je van der Waalova konstanta plynu uvnitř bubliny a V_m molární objem.

Zde uvedený model Qin-Ferrara (2010) vychází z Keller-Miksisovy rovnice (2.8). Tento model zahrnuje vliv stlačitelnosti kapaliny, okolní tkáň a membránu bubliny. Pohybová rovnice má následující tvar: [16]

$$\begin{aligned} & \left[\rho_L \left(1 - \frac{\dot{R}_2}{C} \right) + \rho_S \left(1 + \frac{\dot{R}_2}{C} \right) \left(\frac{R_2}{R_1} - 1 \right) \right] R_2 \ddot{R}_2 + \\ & + \left\{ \frac{3}{2} \rho_L \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\dot{R}_2}{C} \right) + \rho_S \left(1 + \frac{\dot{R}_2}{C} \right) \left[-\frac{3}{2} + 2 \left(\frac{R_2}{R_1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^4 \right] \right\} \dot{R}_2^2 = \\ & = \left(1 + \frac{\dot{R}_2}{C} \right) \left\{ p_g(t) - \frac{2\sigma_1}{R_1} - \frac{2\sigma_2}{R_2} - \frac{4}{3} G_S \left[1 - \left(\frac{R_{20}}{R_2} \right)^3 \right] \frac{V_S}{R_2^3 - V_S} - 4\mu_S \frac{V_S}{R_2^3 - V_S} \frac{\dot{R}_2}{R_2} - \right. \\ & \left. - \frac{4}{3} G_L \left[1 - \left(\frac{R_{20}}{R_2} \right)^3 \right] - 4\mu_L \frac{\dot{R}_2}{R_2} - p_{\infty 0} - p_{\infty}(t) \right\} - 3\kappa \frac{\dot{R}_2}{C} \left(\frac{R_2}{R_{10}} \right)^3 \frac{p_g(t)}{\left(\frac{R_1}{R_{10}} \right)^3 - \frac{b}{V_m}}, \quad (3.3) \end{aligned}$$

kde $R_1 = (R_2^3 - V_S)^{1/3}$ a $V_S = R_{20}^3 - R_{10}^3$.

Pokud $R_{20} = R_{10}$, bude se jednat o plynovou bublinu bez membrány, která osciluje v měkké tkáni. Pro případ, kdy $R_{20} = R_{10}$ a $G_L = 0$, se rovnice (3.3) zredukuje na rovnici (2.8) a bude se jednat o bublinu oscilující ve viskózní Newtonské kapalině.

3.3 Vlastní frekvence mikrobubliny s membránou

Obdobně jako v případě bubliny bez membrány lze linearizací pohybové rovnice získat vlastní frekvenci bubliny s membránou. Ta je v porovnání s (1.18) vyšší vlivem modulu pružnosti ve smyku membrány G_S . Vztah pro výpočet vlastní frekvence mikrobubliny s membránou je následující: [27]

$$f_0 = \frac{1}{2\pi R_0} \sqrt{\frac{1}{\rho_L} \left(3\kappa p_{g0} + 12G_S \frac{\delta_S}{R_0} \right)}, \quad (3.4)$$

kde δ_S je tloušťka membrány.

4 Numerické metody pro řešení RP rovnice

Rayleigh-Plessetova rovnice a její modifikace jsou nelineárními diferenciálními rovnicemi druhého řádu, které nelze řešit analyticky. Je nutné přistoupit k řešení za pomoci numerických metod.

Těchto metod pro řešení obyčejných diferenciálních rovnic (ODR) existuje celá řada. V této kapitole budou některé z nich popsány se zaměřením na ty, které jsou implementovány v programu Matlab.

Tato kapitola čerpá především ze zdrojů [8], [10] a [11]. Matematické symboly užívané v této kapitole nejsou zahrnuty v *Seznamu použitých zkratk a symbolů*, ale jsou vysvětleny přímo v textu.

4.1 Počáteční problém pro ODR

Řešení diferenciálních rovnic prvního řádu spočívá v určení funkce $y(t)$, která vyhovuje diferenciální rovnici

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (4.1)$$

a splňuje počáteční podmínku

$$y(a) = \eta. \quad (4.2)$$

Jestliže je v okolí D bodu $[a, \eta]$ funkce $f(t, y)$ spojitá a splňuje v tomto okolí Lipschitzovu podmínku¹, pak bodem $[a, \eta]$ prochází jediné řešení $y(t)$ rovnice (4.1).

Počáteční problém pro ODR řádu d ,

$$y^{(d)}(t) = F(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(d-1)}(t)) \quad (4.3)$$

s počátečními podmínkami

$$y(a) = \eta_1, y'(a) = \eta_2, \dots, y^{(d-1)}(a) = \eta_d \quad (4.4)$$

lze snadno převést na počáteční problém pro d rovnic řádu prvního:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2(t), & y_1(a) &= \eta_1, \\ y_2'(t) &= y_3(t), & y_2(a) &= \eta_2, \\ &\vdots & &\vdots \\ y_{d-1}'(t) &= y_d(t), & y_{d-1}(a) &= \eta_{d-1}, \\ y_d'(t) &= F(t, y_1(t), y_2(t), \dots, y_d(t)), & y_d(a) &= \eta_d, \end{aligned}$$

kde $y_1(t) = y(t)$, $y_2(t) = y'(t)$, \dots , $y_d(t) = y^{(d-1)}(t)$. Jelikož je RP rovnice ODR druhého řádu, bude tohoto při řešení využito.

Numerické řešení počáteční úlohy spočívá ve výpočtu přibližných hodnot hledaného řešení $y(t)$ v bodech t_n , dostatečně hustě pokrývající interval řešení $\langle a, b \rangle$ rozdělený na Q bodů (uzlů). Numerickou metodou pro řešení počáteční úlohy (4.1), (4.2) je potom předpis pro výpočet aproximací y_1, y_2, \dots, y_Q funkce v jednotlivých uzlech. Hodnota $y_0 = \eta$ je rovna přesné hodnotě z počáteční podmínky.

¹*Lipschitzova podmínka:* Funkce $f(t, y)$ splňuje Lipschitzovu podmínku, jestliže existuje konstanta L , pro kterou platí $|f(t, u) - f(t, v)| \leq L|u - v| \quad \forall [t, u], [t, v] \in D$.

4.2 Eulerovy metody

Jedná se o nejjednodušší numerické metody, které Euler publikoval ve svých pracích v letech 1768 až 1770.

4.2.1 Explicitní Eulerova metoda

Explicitní Eulerova metoda (EE metoda) je definována předpisem

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \quad (4.5)$$

kde h je délka kroku. Explicitní se nazývá proto, že výpočet y_{n+1} je dán explicitním vzorcem: hodnota y_{n+1} je získána dosazením známé hodnoty y_n do pravé strany rovnice (4.5).

Diskretizační chyby. Přesnost numerické metody se měří na základě lokální diskretizační chyby (anglicky *local truncation error*). Je to chyba, které je dosaženo v jednom kroku metody, za tzv. lokalizačního předpokladu, že $y_n = y(t_n)$, tedy že y_n je přesné řešení počáteční úlohy. Pro EE metodu je lokální diskretizační chyba lte_n dána vztahem:

$$lte_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - hf(t_n, y(t_n)). \quad (4.6)$$

Ta ovšem při reálném výpočtu nevzniká, jelikož lokalizační předpoklad není splněn. Pro praktické účely, jako např. řízení délky kroku se pracuje s tzv. lokální chybou (anglicky *local error*). Je to chyba, která vzniká při reálném výpočtu mezi dvěma kroky. Je definována:

$$le_n = u_n(t_{n+1}) - y_{n+1}, \quad (4.7)$$

kde $u_n(t)$ je tzv. lokální řešení počátečního problému

$$u'_n(t) = f(t, u_n(t)), \quad u_n(t_n) = y_n. \quad (4.8)$$

Při dostatečně malém kroku h je rozdíl mezi těmito chybami zanedbatelný.

Hromaděním lokálních chyb vzniká globální diskretizační chyba

$$e_n = y(t_n) - y_n. \quad (4.9)$$

Globální diskretizační chyba je úměrná velikosti kroku h . V případě rovnoměrného rozdělení platí, že

$$|e_n| = |y(t_n) - y_n| \leq Ch, \quad n = 0, 1, \dots, Q, \quad (4.10)$$

kde C je konstanta nezávislá na h . Skutečnost, kterou vyjadřuje vztah (4.10) lze vyjádřit tvrzením, že globální diskretizační chyba EE metody je řádu $\mathcal{O}(h)$, neboli *EE metoda je řádu 1*. Řád metody udává také rychlost konvergence řešení.

Numerické metody vyšších řádů dávají přesnější výsledky než metody nižších řádů.

Stabilita. Pro numerické metody je možné odvodit oblast absolutní stability, tedy oblast, ve které je metoda při daném kroku stabilní a řešení zkonverguje.

Tato oblast se zjišťuje za pomoci tzv. testovací úlohy:

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = 1, \quad (4.11)$$

kde $\lambda < 0$ je daná konstanta. Přesné řešení této funkce je $y(t) = e^{\lambda t}$. Tato funkce je klesající a platí, že $e^{\lambda t} \rightarrow 0$ pro $t \rightarrow \infty$. Pro numerické řešení musí tedy platit *podmínka stability*

$$y_n \rightarrow 0 \quad \text{pro } t_n = nh \rightarrow \infty. \quad (4.12)$$

Řešení testovací úlohy užitím EE metody je následující:

$$y_{n+1} = y_n + h\lambda y_n = (1 + h\lambda)y_n = \dots = (1 + h\lambda)^{n+1}y_0. \quad (4.13)$$

Proto, aby platilo (4.12), musí být splněno

$$|1 + h\lambda| < 1. \quad (4.14)$$

Za předpokladu, že λ je komplexní číslo, je pro EE metodu oblast absolutní stability dána jednotkovým kruhem $|z + 1| < 1$ v komplexní rovině se středem v bodě $[-1, 0]$. Jinak řečeno EE metoda je absolutně stabilní pro λ a h taková, pro která platí vztah (4.14).

Tvar a velikost oblasti absolutní stability je společně s řádem metody základní charakteristikou kvality numerické metody. Z tohoto pohledu EE metoda není příliš kvalitní, jelikož je pouze řádu 1 a oblast absolutní stability je malá. Z těchto důvodů se často pro výpočty ODR nepoužívá.

Tuhost problému. Jestliže je tuhý problém řešen explicitní metodou, je výpočet neefektivní a pro pevnou délku kroku se dostává řešení, které často osciluje a explozivně roste. Při použití automatického řízení délky kroku lze problém vyřešit, ale za cenu toho, že je použita velmi malá délka kroku.

4.2.2 Implicitní Eulerova metoda

Předpis implicitní Eulerovy (IE) metody je následující:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}). \quad (4.15)$$

Jedná se o metodu podobnou EE. Rozdílem je, že argumentem funkce $f(t, y)$ je neznámá y_{n+1} . Tu je nutné získat pomocí vhodné iterační metody. Toto se jeví oproti EE metodě jako nevýhoda.

Řád této metody je stejně jako u EE 1. Výhodou oproti EE metodě je naopak obrovská oblast absolutní stability. Je to celý vnějšek $|z - 1| > 1$ jednotkového kruhu v komplexní rovině se středem v bodě $[1, 0]$. Podmínka stability (4.12) délku kroku této metody tedy nijak neomezuje.

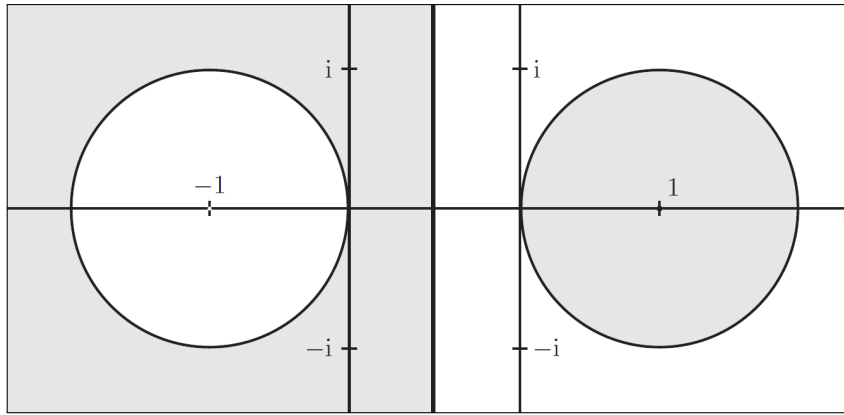
Porovnání oblastí absolutní stability těchto dvou metod je znázorněno na obr. 4.1.

4.2.3 Lichoběžníková metoda

Tato metoda se získá jako aritmetický průměr metod EE a IE:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} h [f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})]. \quad (4.16)$$

Jedná se tedy o implicitní metodu a je řádu 2. Oblastí absolutní stability této metody je celá záporná polorovina komplexní roviny. V Matlabu je lichoběžníková metoda implementována jako funkce `ode23t`.



Obrázek 4.1: Oblast absolutní stability (označena bíle) pro EE metodu (vlevo) a IE metodu (vpravo). [8]

4.3 Runge-Kuttovy metody

S myšlenkou rozšířit Eulerovu metodu o možnost vícero výpočtů derivace v jednom kroku, za účelem vyšší přesnosti, přišel Runge (1895). Dále k této myšlence přispěli Heun (1900) a Kutta (1901). Zájem o tyto metody se rozvinul s nástupem digitálních počítačů. Runge-Kuttovy (RK) metody jsou jednoduše programovatelné a jsou nejpoužívanějšími metodami pro řešení počátečního problému. [8, 12]

Obecný tvar *s*-stupňové explicitní RK metody je

$$y_{n+1} = y_n + h(b_1k_1 + b_2k_2 + \dots + b_sk_s), \quad (4.17)$$

kde koeficienty $k_i, i = 1, 2, \dots, s$, jsou určeny předpisem

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ k_2 &= f(t_n + hc_2, y_n + ha_{21}k_1), \\ k_3 &= f(t_n + hc_3, y_n + h(a_{31}k_1 + a_{32}k_2)), \\ &\vdots \\ k_s &= f(t_n + hc_s, y_n + h(a_{s1}k_1 + a_{s2}k_2 + \dots + a_{s,s-1}k_{s-1})), \end{aligned} \quad (4.18)$$

a kde b_i, c_i a a_{ij} jsou konstanty definující konkrétní metodu. Při řešení jsou vypočteny jednotlivé koeficienty $k_1 \dots k_s$, dosazeny do (4.17) a tím se získá hodnota y_{n+1} . RK metody jsou jednokrokové – pro výpočet y_{n+1} je třeba znát jen y_n .

Konkrétní RK metoda je tedy definována stupněm s a konstantami c_i, b_i, a_{ij} . Tyto konstanty se obvykle zapisují do tzv. *Butcherovy tabulky*:

c_2	a_{21}				
c_3	a_{31}	a_{32}			
\vdots	\vdots	\vdots	\ddots		
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\dots	$a_{s,s-1}$	
	b_1	b_2	\dots	b_{s-1}	b_s

RK metoda řádu $p \geq 1$ má globální diskretizační chybu $\mathcal{O}(h^p)$. Jak vyplývá z (4.19), s -stupňové metody řádu s existují jen pro $1 \leq s \leq 4$:

$$\begin{aligned} p(s) &= s \quad \text{pro } s = 1, 2, 3, 4 & p(8) &= 6, \\ p(5) &= 4, & p(9) &= 7, \\ p(6) &= 5, & p(s) &\leq s - 2 \quad \text{pro } s \geq 10, \\ p(7) &= 6, \end{aligned} \tag{4.19}$$

kde $p(s)$ je maximální dosažitelný řád s -stupňové metody.

Řízení délky kroku. Výhodou RK metod je možnost řízení délky kroku. To umožňuje provedení výpočtu s použitím co nejmenšího počtu kroků, ale zároveň je zachována dostatečná přesnost. Tato délka je stanovena na základě odhadu est_n velikosti lokální chyby le_n tak, aby tato chyba odpovídala přibližně hodnotě tolerance ε , která je vstupem pro výpočetní program. Výsledkem řízení délky kroku je, že v místech, kde je průběh funkce klidný, se použije větší časový krok, naopak v místech vysokého gradientu funkce se krok výpočtu snižuje.

Odhad lokální chyby je založen na použití dvou vhodně zvolených metod, které jsou řádu p a řádu $p + 1$. Z výchozí hodnoty y_n je vypočtena přesnější metodou y_{n+1}^{**} a méně přesnou metodou y_{n+1}^* . Odhad lokální chyby je poté

$$est_n = y_{n+1}^{**} - y_{n+1}^*. \tag{4.20}$$

Pokud se ve výpočtu pokračuje přesnější metodou, tedy $y_{n+1} = y_{n+1}^{**} = y_{n+1}^* + est_n$, nazývá se toto použití metod s *lokální extrapolací*. Tento postup je upřednostňován. V opačném případě, kdy $y_{n+1} = y_{n+1}^*$, se jedná o použití *bez lokální extrapolace*. Tento odhad lokální chyby je použit v algoritmu pro řízení délky kroku.

Dvojice RK metod, které jsou takto při výpočtu použity se zapisují do tzv. rozšířené Butcherovy tabulky:

c_2	a_{21}			
\vdots	\vdots	\ddots		
c_s	a_{s1}	a_{s2}	\dots	
	b_1^*	b_2^*	\dots	b_s^*
	b_1^{**}	b_2^{**}	\dots	b_s^{**}
	E_1	E_2	\dots	E_s

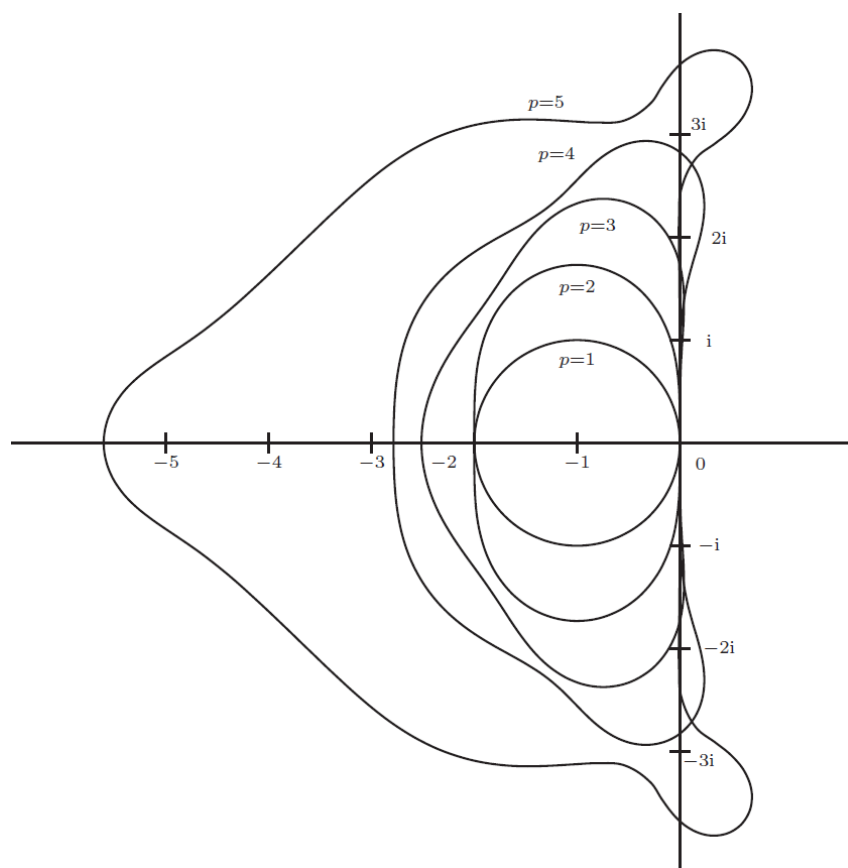
kde $E_j = b_j^{**} - b_j^*$, $j = 1, 2, \dots, s$.

Na obr. 4.2 je znázorněna oblast stability explicitních RK metod pro řád 1-5.

V dalším textu budou uvedeny explicitní Runge-Kuttovy metody, které jsou implementovány v programu Matlab:

4.3.1 Bogacki-Shampine metoda

Tato metoda, zkráceně BS32 (kde první číslo značí řád metody a druhé řád pomocné metody), je řádu 3. Jedná se o jednokrokovou metodu a používá se jako metoda s lokální extrapolací. V Matlabu je implementována jako funkce `ode23`.



Obrázek 4.2: Oblast stability explicitních RK metod řádu 1–5 [8]

Rozšířená Butcherova tabulka metody BS32 je:

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$		
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	
	$\frac{7}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$
	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	0
	$-\frac{5}{72}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{8}$

V případě hrubých tolerancí a pro středně tuhé problémy je obvykle účinnější, než metoda DP54. [9, 10]

4.3.2 Dormand-Prince metoda

Zkráceně DP54, v Matlabu implementována jako `ode45`. Je řádu 5, má tedy nejvyšší řád z RK metod, které jsou v programu Matlab používány. Jedná se o jednokrokovou metodu. Je nejpoužívanější a vhodná pro řešení většiny problémů. [9, 10]

Butcherova tabulka této metody je následující:

$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$						
$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$					
$\frac{4}{5}$	$\frac{44}{45}$	$-\frac{56}{15}$	$\frac{32}{9}$				
$\frac{8}{9}$	$\frac{19\,372}{6\,561}$	$-\frac{25\,360}{2\,187}$	$\frac{64\,448}{6\,561}$	$-\frac{212}{729}$			
1	$\frac{9\,017}{3\,168}$	$-\frac{355}{33}$	$\frac{46\,732}{5\,247}$	$\frac{49}{176}$	$-\frac{5\,103}{18\,656}$		
1	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1\,113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2\,187}{6\,784}$	$\frac{11}{84}$	
	$\frac{5\,179}{57\,600}$	0	$\frac{7\,571}{16\,695}$	$\frac{393}{640}$	$-\frac{92\,097}{339\,200}$	$\frac{187}{2\,100}$	$\frac{1}{40}$
	$\frac{35}{384}$	0	$\frac{500}{1\,113}$	$\frac{125}{192}$	$-\frac{2\,187}{6\,784}$	$\frac{11}{84}$	0
	$\frac{71}{57\,600}$	0	$-\frac{71}{16\,695}$	$\frac{71}{1\,920}$	$-\frac{17\,253}{339\,200}$	$\frac{22}{525}$	$-\frac{1}{40}$

4.4 Adams-Bashforth-Moultonova metoda

Jedná se o implicitní mnohakrokovou metodu. Přibližné řešení y_{n+1} v uzlu t_{n+1} je tedy získáno pomocí dříve spočtených aproximací $y_n, y_{n-1}, y_{n-2}, \dots$ a odpovídajících hodnot $f(t_n, y_n), f(t_{n-1}, y_{n-1}), f(t_{n-2}, y_{n-2}), \dots$ pravé strany diferenciální rovnice. Při výpočtu se mění jak délka kroku, tak řád metody. V Matlabu je nazývána jako funkce `ode113` a použitý řád metody je 1 až 12. [10]

Její použití je vhodné pro výpočty s přísnou tolerancí a pro výpočetně náročné ODE. [9]

4.5 Metody pro řešení tuhých problémů

Pro řešení tuhých problémů je nutné použít numerické metody s neomezenou oblastí absolutní stability. V Matlabu jsou tyto metody zastoupeny funkcemi `ode15s`, `ode23s`, `ode23t` a `ode23tb`.

Funkce `ode15s` je založena na metodách zpětného derivování. Tyto metody mají neomezenou oblast absolutní stability, jsou implicitní a jsou to metody mnohakrokové. V Matlabu funkce `ode15s` volí optimální délku kroku i řád metody (1-5). Pokud funkce `ode45` selhává, nebo je neúčinná a dá se předpokládat, že problém je tuhý, je vhodné použít k řešení tuto metodu. [9, 10]

Funkce `ode23s`, `ode23t`, `ode23tr` jsou vhodné pro řešení tuhých problémů, u kterých nejsou vysoké nároky na přesnost řešení. Používají metody druhého řádu a jejich výhoda oproti `ode15s` je ve vyšší efektivitě (účinnosti) řešení. [9, 13]

5 Bublina v proměnném tlakovém poli

Rayleigh-Plessetova rovnice a její modifikace uvedené v kapitole 2 byly naprogramovány v programu *Matlab* pro řešení dynamiky kavitační bubliny v proměnném tlakovém poli. Vstupní parametry potřebné pro výpočet jsou uvedeny v následující tabulce:

Tabulka 5.1: Vstupní parametry pro výpočet chování bubliny v proměnném tlakovém poli

Název parametru	Symbol	Typická hodnota
Počáteční poloměr bubliny	R_0	5 μm
Budící frekvence	f	10 kHz
Amplituda budicího tlaku	p_a	240 kPa
Čas výpočtu	$t_0 - t_{\max}$	0–1 ms
Počáteční teplota	T_0	293,15 K
Počáteční tlak daleko od bubliny	$p_{\infty 0}$	101,325 kPa
Hustota vody	ρ	998,206 kg.m ⁻³
Tlak sytých par	p_v	2339,215 Pa
Povrchové napětí	σ	73,736 mN.m ⁻¹
Dynamická viskozita	μ	0,001 Pa.s
Poissonova konstanta	κ	1,4
Rychlost zvuku ve vodě	c_∞	1500 m.s ⁻¹
Konstanty Taitovy	B	304,9 MPa
stavové rovnice	n	7,15

Hodnoty ρ , p_v a μ jsou vypočteny na základě zadané teploty a tlaku kapaliny pomocí matlabovského programu *IAPWS-IF97 functional form with no slip* [25], který je založen na dokumentech Mezinárodní asociace pro vlastnosti vody a páry IAPWS. Povrchové napětí vody je vypočteno z rovnice (5.1) [26]:

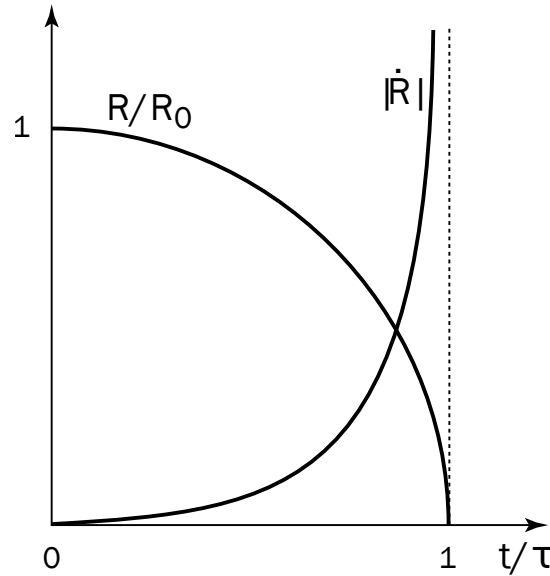
$$\sigma = B\tau^\mu(1 + b\tau), \quad (5.1)$$

kde

$$\begin{aligned} \tau &= 1 - T_0/T_c \\ T_c &= 647,096 \text{ K} \\ B &= 235,8 \text{ mN.m}^{-1} \\ b &= -0,625 \\ \mu &= 1,256 \end{aligned}$$

5.1 Výběr numerické metody

RP rovnice a její modifikace jsou z hlediska numerického řešení náročné. To zejména kvůli vysokým rychlostem ve fázi kolapsu bubliny. Jelikož v čase $t = \tau$ nastává singularita (viz obr. 5.1), funkci je obtížné numericky integrovat – časový krok výpočtu by musel být nekonečně malý.



Obrázek 5.1: Průběh R a \dot{R} během kolapsu bubliny [2]

Pro výpočet je tedy zásadní výběr správné numerické metody, jejímž cílem je co nejpřesnější řešení. Nejtěžším úkolem je správně simulovat kolaps a opětovné zvětšení bubliny z jejího nejmenšího poloměru. Kritéria, která by měla numerická metoda splňovat jsou:

- proměnný časový krok
- vyšší řád přesnosti
- nízká výpočtová náročnost
- schopna výpočtu co nejblíže k singularitě

Z funkcí implementovaných v Matlabu (uvedené v kap. 4) by tato kritéria měly splňovat dvě metody `ode45` a `ode113`. Jelikož neexistuje analytické řešení RP rovnice, podle kterého by bylo možné posoudit přesnost řešení, Alehossein [24] při řešení podobného problému testoval numerické metody na základě jejich úspěšnosti při integrování ODR druhého řádu

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 \tan(x) + 2 \tan^3(x), \quad (5.2)$$

která má s počátečními podmínkami $y(0) = 0$ a $y'(0) = 1$ řešení:

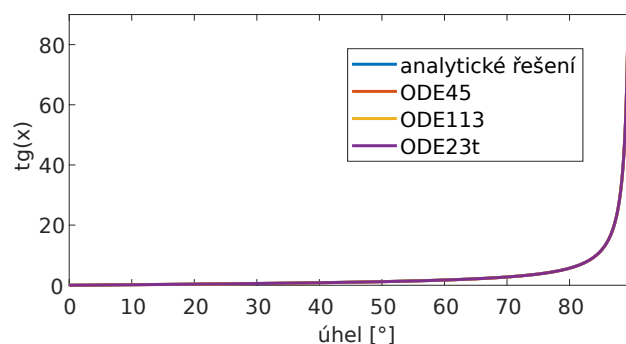
$$y = \tan(x). \quad (5.3)$$

Funkce tangens je pro úhel $x = 90^\circ, 270^\circ, \dots, (2k+1)90^\circ$ singulární, podobně jako RP rovnice pro $R = 0$. [24]

Rovnice (5.2) byla dle tohoto vzoru naprogramována a řešena v intervalu $x = 0..90^\circ$ pomocí funkcí `ode45`, `ode113` a pro porovnání také méně přesnou metodou 2. řádu `ode23t`. Relativní tolerance byla zadána 1×10^{-9} , absolutní tolerance 1×10^{-12} . V tab. 5.2 je uvedena výpočtová náročnost těchto metod. Odtud jednoznačně vyplývá, že z hlediska výpočtové náročnosti je pro řešení tohoto problému nejvhodnější volbou `ode113`. Na obr. 5.2 je zobrazeno řešení rovnice (5.2), kde se v tomto měřítku jednotlivá řešení překrývají.

Tabulka 5.2: Výpočtová náročnost metod při řešení rovnice (5.2)

	Počet vyhodnocení funkce	Čas výpočtu (s)
ode113	1916	0,223
ode45	34 855	0,580
ode23t	31 958	2,307

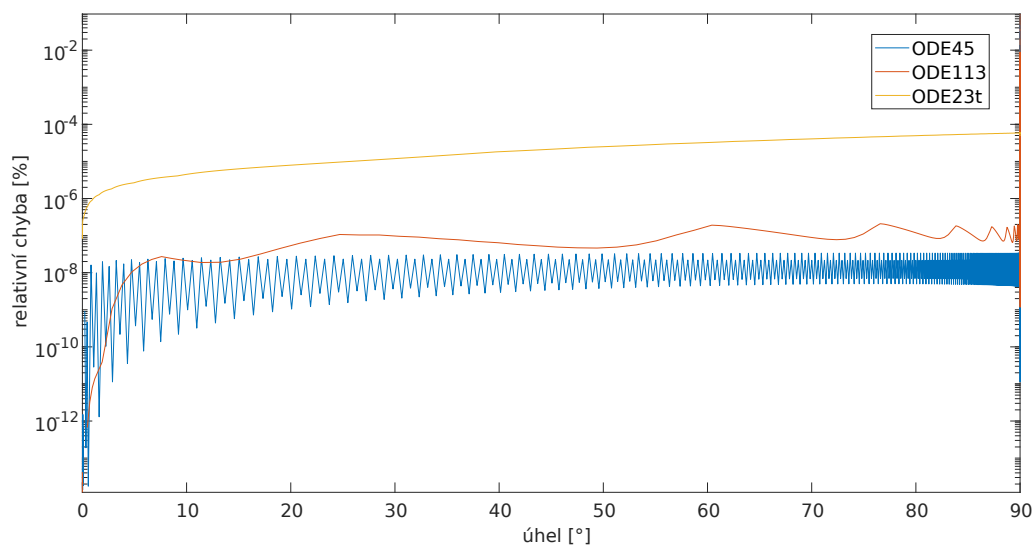


Obrázek 5.2: Řešení rovnice (5.2)

Relativní chyba řešení pomocí jednotlivých numerických metod byla vypočtena dle následujícího vztahu:

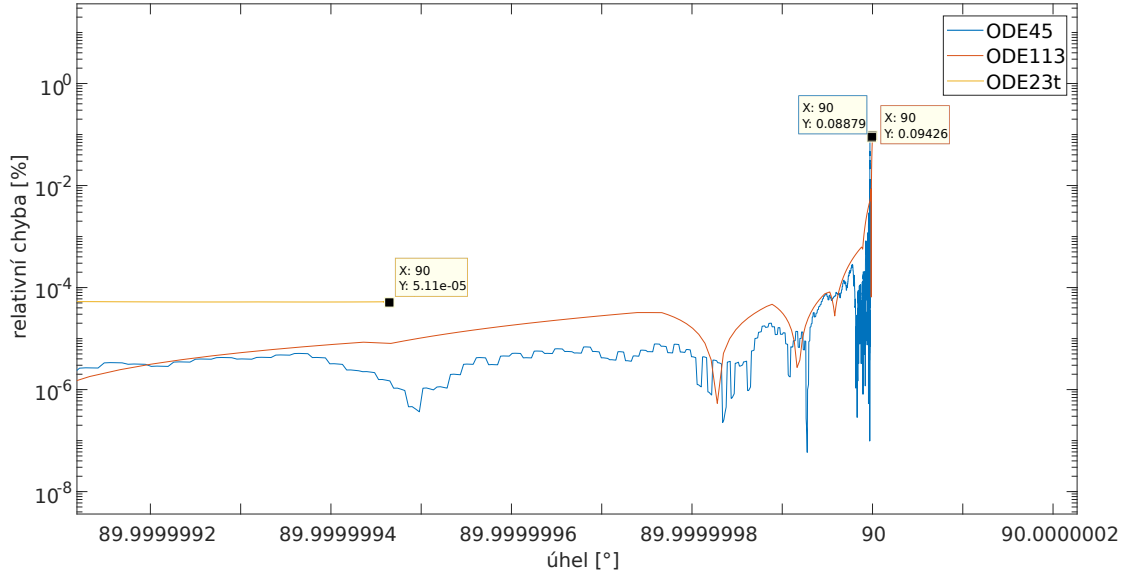
$$rel.chyba = \frac{|y_{ODE}(x) - \tan(x)|}{\tan(x)} \cdot 100, \quad [\%] \quad (5.4)$$

kde $y_{ODE}(x)$ je hodnota získána příslušnou funkcí. Průběh této chyby je zobrazen na obr. 5.3. Zde je vidět, že funkce `ode45` a `ode113` jsou z hlediska přesnosti výpočtu srovnatelné a relativní chyba funkce `ode23t` je přibližně o 2 řády vyšší.



Obrázek 5.3: Relativní chyba při řešení rovnice (5.2)

S úhlem blížícím se 90° , kdy hodnota funkce tangens roste k nekonečnu, se chyba zvyšuje (detail na obr. 5.4). Výpočet skončil chybou v bodě, kdy krok metody `ode45` a `ode113` dosáhl nejmenší možné hodnoty $3,6 \times 10^{-15}$ rad, resp. $5,6 \times 10^{-15}$ rad pro `ode23t`.



Obrázek 5.4: Relativní chyba při řešení rovnice (5.2) - detail

Na základě tohoto výpočtu byla pro všechna další řešení vybrána funkce `ode113`, jelikož je výpočetně nejméně náročná a její přesnost je srovnatelná s přesností `ode45`.

5.2 Skokové zvýšení tlaku

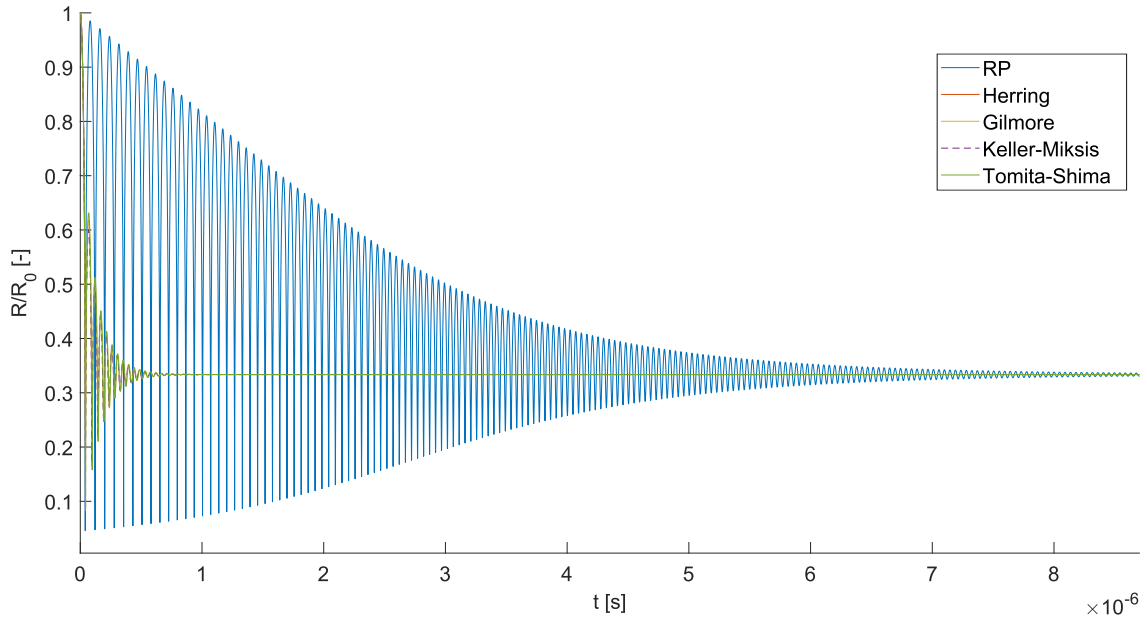
Pro ilustraci rozdílů mezi jednotlivými modifikacemi Rayleigh-Plessetovy rovnice je vhodné provést výpočet dynamiky bubliny při skokovém zvýšení tlaku. Okolní tlak kapaliny je v tomto případě konstantní a je dán vztahem (5.5):

$$p_\infty = A \cdot p_{g0} \quad (5.5)$$

Při tomto buzení nedochází ke kavitaci. Na obr. 5.5 je vidět odezva bubliny o počátečním poloměru $R_0 = 5 \mu\text{m}$ při skokovém zvýšení okolního tlaku na stonásobek původního hodnoty tlaku p_{g0} . Dojde k rozkmitání bubliny a následnému ustálení poloměru při nové hodnotě. Zde se ukazuje první z rozdílů mezi Rayleigh-Plessetovou rovnicí a jejími modifikacemi, které zahrnují vliv stlačitelnosti okolní kapaliny. Tím je doba dokmitávání, která je u RP rovnice podstatně delší než u ostatních modelů. Velikost poloměru po ustálení pro různé hodnoty A je uvedena v tab. 5.3. Se zvyšujícím tlakem se poloměr po ustálení zmenšuje. Poměr R/R_0 zůstává pro různé hodnoty počátečního poloměru stejný.

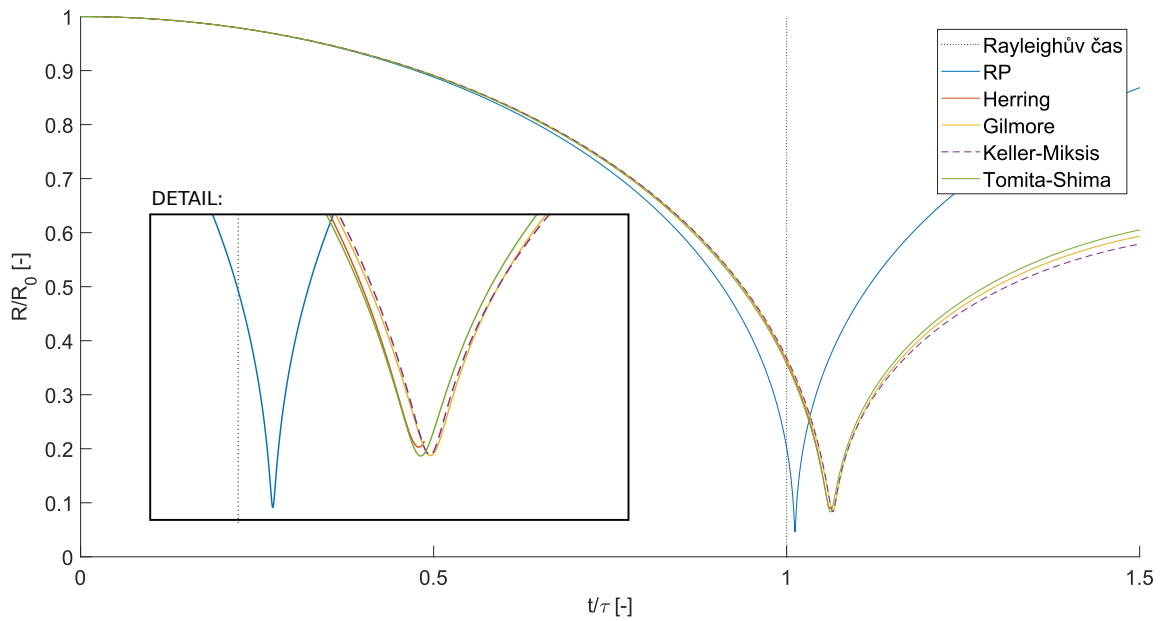
Tabulka 5.3: Velikost rovnovážného poloměru pro různé A

A	10	50	100	200
R/R_0	0,573	0,393	0,334	0,283



Obrázek 5.5: Odezva na skokové zvýšení tlaku. $R_0 = 5 \mu\text{m}$, $p_{g0} = 128\,080 \text{ Pa}$, $A = 100$

V detailu na obr. 5.6 se ukazuje rozdíl mezi jednotlivými modely v čase prvního kolapsu bubliny. Hodnota Rayleighova času je vypočtena dle rovnice (1.15) a je mírně odlišná od numerického výpočtu dle RP rovnice, kde čas prvního kolapsu bubliny je $t/\tau = 1,012$. Pro ostatní modely je tento čas roven $t/\tau = 1,062\text{--}1,065$, což odpovídá předpokladům. Průběh Gilmoreova a Keller-Miksisova modelu je velice podobný. Výpočet Herringova modelu, který počítá s konstantní rychlostí zvuku, skončil s chybou v čase $t/\tau = 1,063$.



Obrázek 5.6: Odezva na skokové zvýšení tlaku - detail.
 $R_0 = 5 \mu\text{m}$, $p_{g0} = 128\,080 \text{ Pa}$, $A = 100$, $\tau = 4,04 \times 10^{-8} \text{ s}$

5.3 Periodická změna tlaku

V případě periodicky se měnícího tlaku je budicí tlak dán rovnicí (5.6):

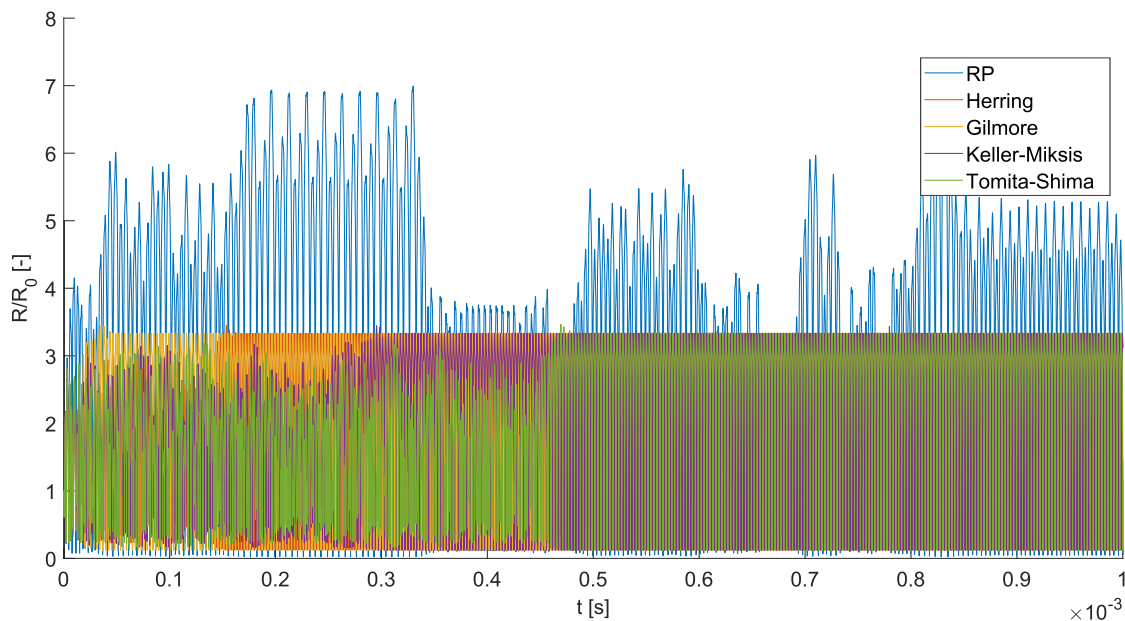
$$p_{\infty}(t) = p_{\infty 0} + p_a \sin(2\pi f t), \quad (5.6)$$

Výpočty jsou prováděny pro 4 různé počáteční poloměry kavitačních bublin: 5, 25, 50 a 100 μm . Tyto hodnoty byly vybrány jako referenční, jelikož je experimentálně zjištěno, že se při kavitaci v největší koncentraci vyskytují kavitační jádra, jejichž rovnovážný poloměr $R_0 = 100 \mu\text{m}$ a menší. [28, 29]

5.3.1 Porovnání RP rovnice a jejích modifikací

Na grafech níže je zobrazeno porovnání řešení pomocí RP rovnice a jejích modifikací při výpočtu bubliny s parametry $R_0 = 5 \mu\text{m}$, $p_a = 240 \text{ kPa}$ a různou budicí frekvencí. Ostatní parametry jsou shodné s těmi, uvedenými v tab. 5.1. Vlastní frekvence této bubliny (vypočtená dle rovnice (1.18)) je $f_0 = 718,674 \text{ kHz}$.

Na obr. 5.7 je vidět chaotické chování bubliny dle RP rovnice, kdy se její amplituda oscilace v čase neustále mění. Naopak při výpočtu dle Gilmora a dalších začne po určitém čase bublina oscilovat periodicky s neměnnou amplitudou. V případě Gilmora je tento čas přibližně $5 \times 10^{-5} \text{ s}$, u Keller-Miksis a Tomita-Shima modelů tento stav nastane později – v čase $3 \times 10^{-4} \text{ s}$ a $5 \times 10^{-4} \text{ s}$. Všechny modifikace se shodují jak v maximálním, tak minimálním poloměru bubliny, který je větší než v případě RP rovnice.



Obrázek 5.7: Porovnání RP rovnice a jejích modifikací při buzení bubliny vlastní frekvencí. $R_0 = 5 \mu\text{m}$, $p_a = 240 \text{ kPa}$, $f = f_0 = 718,674 \text{ kHz}$

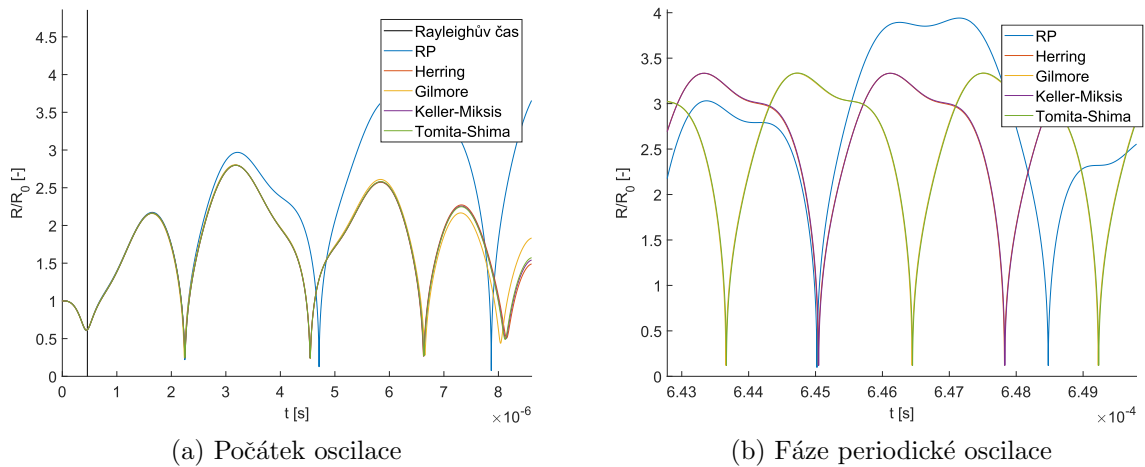
V tab. 5.4 jsou uvedeny hodnoty největšího a nejmenšího poloměru bubliny, jeho maximální rychlosti a maximální teploty a tlaku uvnitř bubliny. Lze zde vidět, že všechny modifikace dávají prakticky shodné výsledky. RP rovnice se ve všech parametrech řádově liší – bublina osciluje s větší amplitudou a vyšší rychlostí a tím pádem jsou i tlak a teplota plynu uvnitř bubliny vyšší.

Tabulka 5.4: Porovnání hodnot parametrů bubliny při výpočtu RP rovnicí a jejími modifikacemi. $R_0 = 5 \mu\text{m}$, $p_a = 240 \text{ kPa}$, $f = f_0 = 718,674 \text{ kHz}$

	R_{\max}/R_0 (-)	R_{\min}/R_0 (-)	$ \dot{R}_{\max} $ (m.s ⁻¹)	T_{\max} (K)	p_{\max} (Pa)
RP	7,11	$2,02 \times 10^{-2}$	$3,71 \times 10^9$	$3,16 \times 10^4$	$1,67 \times 10^{12}$
Herring	3,45	$1,19 \times 10^{-1}$	$9,64 \times 10^7$	$3,79 \times 10^3$	$9,94 \times 10^8$
Gilmore	3,45	$1,15 \times 10^{-1}$	$9,50 \times 10^7$	$3,93 \times 10^3$	$1,13 \times 10^9$
Keller-Miksis	3,45	$1,15 \times 10^{-1}$	$9,79 \times 10^7$	$3,92 \times 10^3$	$1,12 \times 10^9$
Tomita-Shima	3,47	$1,14 \times 10^{-1}$	$9,51 \times 10^7$	$3,95 \times 10^3$	$1,15 \times 10^9$

Na obr. 5.8a je zobrazen detail počátku oscilace. Zatímco průběh vypočtený dle modifikací je prakticky shodný, průběh dle RP rovnice se liší. Kromě toho se zde ukazuje, že Rayleighův čas dle (1.15) není totožný s časem prvního kolapsu bubliny, ale s časem prvního lokálního minima poloměru, které nastane ještě před samotným kolapsem.

Na obr. 5.8b je zobrazena část průběhu, kdy je již oscilace periodická. Výpočet dle Herringova modelu je ve stejné fázi s Keller-Miksisovým modelem a zároveň Gilmoreův model je ve stejné fázi s Tomita-Shima modelem. Toto sfázování se pro různé amplitudy budícího tlaku mění. Pro některé tlaky oscilují se stejnou fází všechny vypočtené modifikace ($p_a = 320 \text{ kPa}$), pro jiné nejsou ve fázi ani jedna ($p_a = 400 \text{ kPa}$). Obojí s výjimkou Herringova modelu, který již na začátku výpočtu často skončí s chybou. V tab. 5.5 jsou porovnány modifikace RP rovnice z hlediska výpočtové náročnosti.

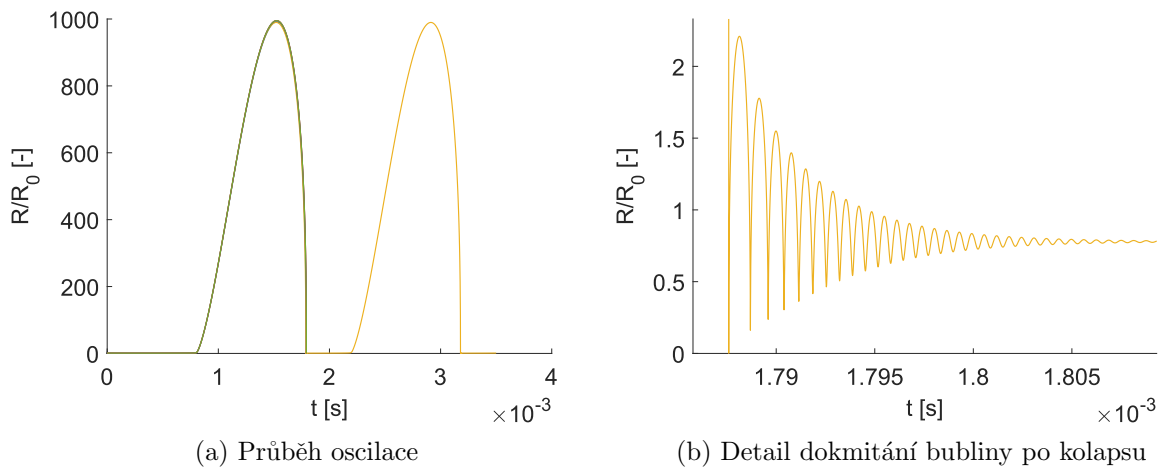


Obrázek 5.8: Detail průběhu oscilace bubliny z obr. 5.7

Při buzení nízkou frekvencí vzhledem k vlastní frekvenci bubliny dojde k vysokému nárůstu jejího poloměru a následně k rychlému kolapsu a dokmitání (obr. 5.9). Při tomto kolapsu všechny modely skončí s chybou, s výjimkou Gilmoreova modelu. V tab. 5.6 je opět porovnání maximálních hodnot z výpočtu. Zde se již hodnoty od jednotlivých modelů liší, právě z důvodu selhání numerického výpočtu.

Tabulka 5.5: Výpočtová náročnost RP rovnice a jejích modifikací pro řešení z obr. 5.7

	Počet vyhodnocení funkce	Čas výpočtu (s)
RP	288 697	6,7
Herring	307 426	6,8
Gilmore	307 001	12,0
Keller-Miksis	302 319	7,2
Tomita-Shima	295 279	7,7



Obrázek 5.9: Průběh oscilace bubliny při buzení nízkou frekvencí.

$$R_0 = 5 \mu\text{m}, p_a = 240 \text{ kPa}, f = f_0/1000 = 718,674 \text{ Hz}$$

Tabulka 5.6: Porovnání hodnot parametrů bubliny při výpočtu RP rovnicí a jejími modifikacemi. $R_0 = 5 \mu\text{m}$, $p_a = 240 \text{ kPa}$, $f = f_0/1000 = 718,674 \text{ Hz}$

	R_{\max}/R_0 (-)	R_{\min}/R_0 (-)	$ \dot{R}_{\max} $ (m.s ⁻¹)	T_{\max} (K)	p_{\max} (Pa)
RP	$9,915 \times 10^2$	$9,718 \times 10^{-3}$	$9,605 \times 10^{13}$	$7,621 \times 10^4$	$3,628 \times 10^{13}$
Herring	$9,952 \times 10^2$	$7,393 \times 10^{-3}$	$7,357 \times 10^{11}$	$1,058 \times 10^5$	$1,144 \times 10^{14}$
Gilmore	$9,897 \times 10^2$	$1,523 \times 10^{-3}$	$2,913 \times 10^{11}$	$7,047 \times 10^5$	$8,723 \times 10^{16}$
Keller-Miksis	$9,952 \times 10^2$	$3,745 \times 10^{-3}$	$1,943 \times 10^{11}$	$2,393 \times 10^5$	$1,991 \times 10^{15}$
Tomita-Shima	$9,952 \times 10^2$	$7,592 \times 10^{-4}$	$5,963 \times 10^{12}$	$1,624 \times 10^6$	$1,622 \times 10^{18}$

Obecně je obtížné určit, která z uvedených modifikací RP rovnice je nejpřesnější. Všechny modifikace, které byly odvozeny za účelem zpřesnění výpočtů, mají podobný průběh. Ten se ovšem zásadně liší od průběhu získaného RP rovnicí. Dá se tedy říci, že RP rovnice je příliš idealizovaná a není vhodné s ní dále pracovat. Herringův model, ve kterém je počítáno s konstantní rychlostí zvuku v kapalině, je také stále příliš idealizovaný a především jeho výpočet velmi často končí chybou již při prvním kolapsu bubliny. Zbývající modely, které jsou v této práci uvedeny – Gilmoreův, Keller-Miksisův a Tomita-Shimův se chovají velmi podobně. Vzhledem k tomu, že Gilmoreův model je jediný, jehož

výpočet byl při výpočtu s nízkou budicí frekvencí úspěšný (viz obr. 5.9), bude i přes jeho vyšší výpočtovou náročnost dále používám právě tento model.

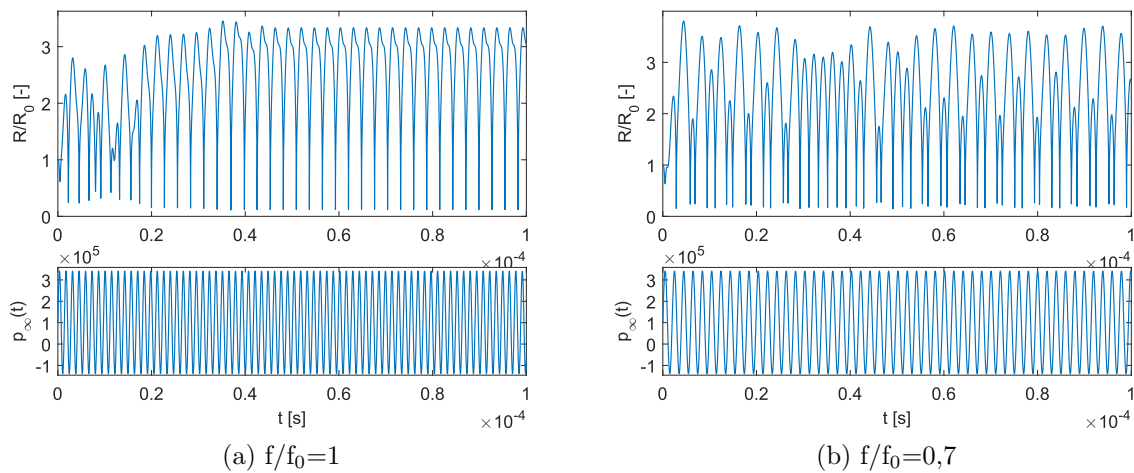
5.4 Dynamika osamocené kavitační bubliny

V této kapitole je řešena dynamika osamocené kavitační bubliny při akustické kavitaci. Na základě výše uvedených závěrů je použit Gilmoreův model, který je řešen pomocí Adams-Bashforth-Moultonovy numerické metody (ode113). Budicí tlak je dán rovnicí (5.6).

5.4.1 Tvary oscilace bubliny

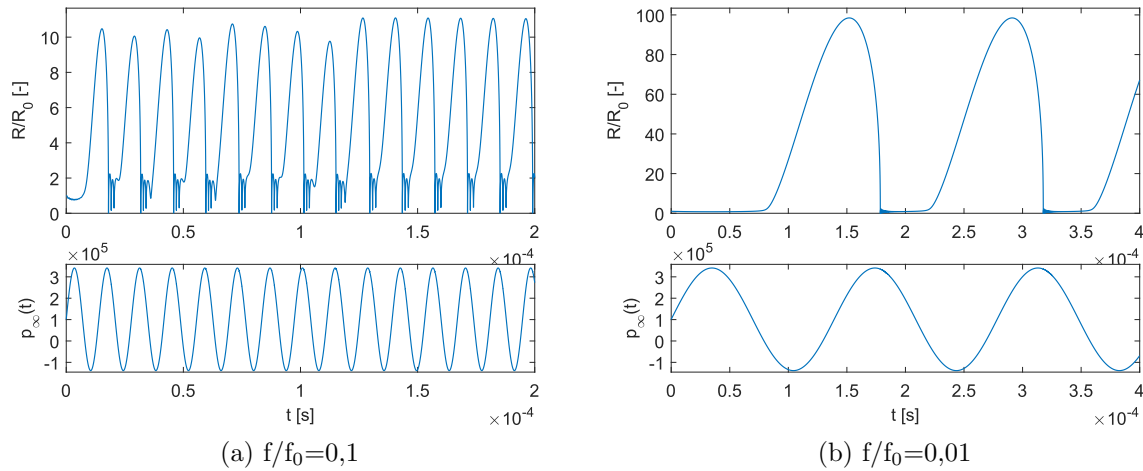
Bylo vypořádováno, že v závislosti na poměru budicí frekvence ku vlastní frekvenci bubliny se objevují 4 módy oscilace jejího rozhraní v čase. Tyto módy jsou znázorněny na obr. 5.10 pro bublinu o počátečním poloměru $R_0 = 5 \mu\text{m}$ a amplitudě budicí frekvence $p_a = 240 \text{ kPa}$. Pro jiné R_0 a p_a jsou tyto průběhy podobné.

Při buzení vlastní frekvencí, $f = f_0$, je kmitání periodické, s konstantní amplitudou oscilace a nedochází k dokmitávání bubliny po kolapsu. Toto je znázorněno na obr. 5.10a. Pokud je frekvence vyšší než f_0 , amplituda oscilace klesá. Při nižší budicí frekvenci, přibližně $0,1 \cdot f_0 < f < f_0$, je kmitání chaotické (obr. 5.10b), nebo má tvar podobný prvnímu případu. Jakmile se budicí frekvence pohybuje kolem hodnoty $f/f_0 = 0,1$, začíná se zřetelně objevovat i fáze dokmitávání bubliny, která následuje po každém kolapsu (obr. 5.11a). Amplituda oscilace bubliny je větší než v předchozích případech a v čase zůstává konstantní. Pro ještě nižší budicí frekvence se amplituda oscilace zvyšuje (obr. 5.11b). V čase opět zůstává konstantní a jsou zřetelná dokmitávání bubliny (detail lze vidět na obr. 5.9b).



Obrázek 5.10: Tvary dle poměru budicí frekvence ku vlastní frekvenci.

$$R_0 = 5 \mu\text{m}, p_a = 240 \text{ kPa}, f_0 = 7,187 \times 10^5 \text{ Hz}$$



Obrázek 5.11: Tvary dle poměru budicí frekvence ku vlastní frekvenci.

$$R_0 = 5 \mu\text{m}, p_a = 240 \text{ kPa}, f_0 = 7,187 \times 10^5 \text{ Hz}$$

5.4.2 Kmitání při různých budících frekvencích

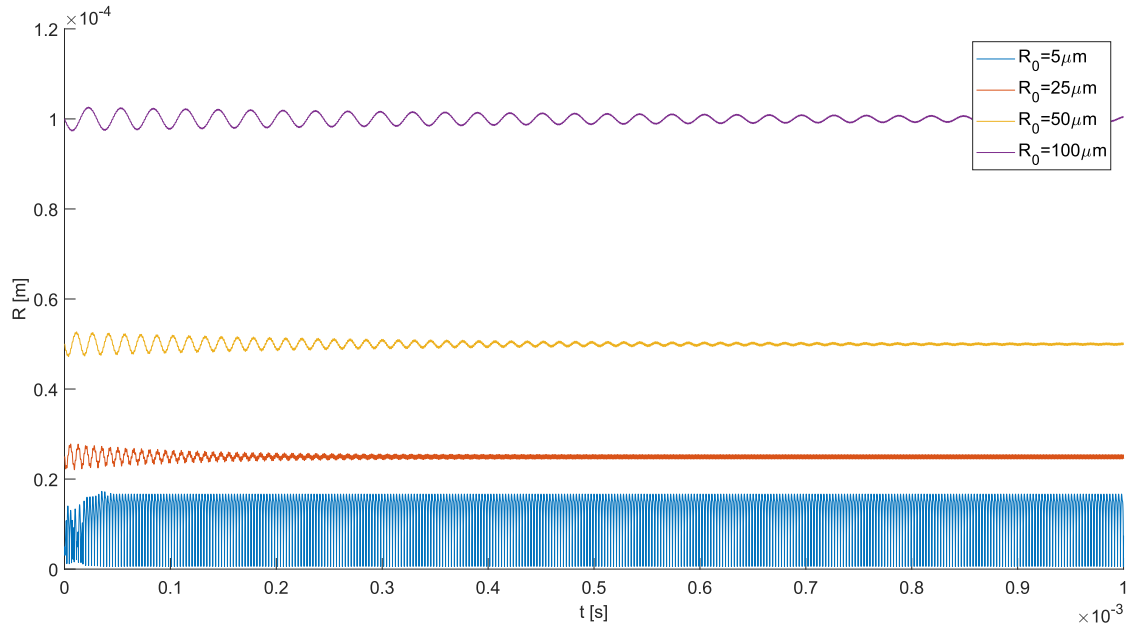
V této části bude ukázáno, jak vypadá kmitání kavitačních bublin o vybraných poloměrech ($R_0 = 5, 25, 50, 100 \mu\text{m}$) při buzení vlastní frekvencí jedné z nich. V tabulce 5.7 jsou uvedeny tyto vlastní frekvence a poměr f/f_0 pro každou velikost.

Tabulka 5.7: Vlastní frekvence vybraných velikostí bublin a poměr mezi nimi

Budicí frekvence (Hz):	Poměr f/f_0 pro jednotlivé R_0 :			
	$5 \mu\text{m}$	$25 \mu\text{m}$	$50 \mu\text{m}$	$100 \mu\text{m}$
$f_{0,5\mu\text{m}} = 7,187 \times 10^5$	1,000	5,412	10,941	22,004
$f_{0,25\mu\text{m}} = 1,328 \times 10^5$	0,185	1,000	2,022	4,066
$f_{0,50\mu\text{m}} = 6,568 \times 10^4$	0,091	0,495	1,000	2,011
$f_{0,100\mu\text{m}} = 3,266 \times 10^4$	0,045	0,246	0,497	1,000

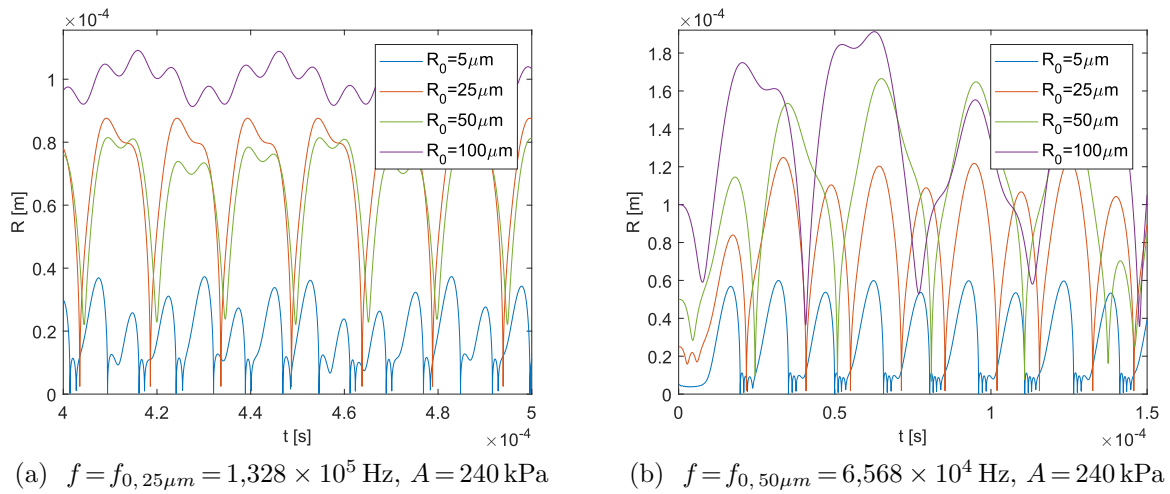
Vlastní frekvence bubliny roste s klesajícím poloměrem. Na obr. 5.12 je ukázáno buzení vlastní frekvencí bubliny o $R_0 = 5 \mu\text{m}$. Pro všechny ostatní velikosti je tato frekvence vyšší než jejich f_0 . Tudíž kmitání všech bublin je periodické. Největší amplituda kmitání je právě pro bublinu o poloměru $5 \mu\text{m}$.

Na obr. 5.13 je znázorněno kmitání těchto bublin při budicí frekvenci rovné vlastní frekvenci $25 \mu\text{m}$ bubliny (obr. 5.13a) a $50 \mu\text{m}$ bubliny (obr. 5.13b). Průběhy odpovídají závěrům z kapitoly 5.4.1: U bubliny o $R_0 = 25 \mu\text{m}$ se objevuje fáze dokmitávání a amplituda větších bublin, pro které platí $f > f_0$, se zvyšuje s tím, jak se budicí frekvence blíží jejich vlastní frekvenci.



Obrázek 5.12: Oscilace bublin různých velikostí při stejné budicí frekvenci.

$$f = f_{0,5\mu m} = 7,187 \times 10^5 \text{ Hz}, A = 240 \text{ kPa}$$

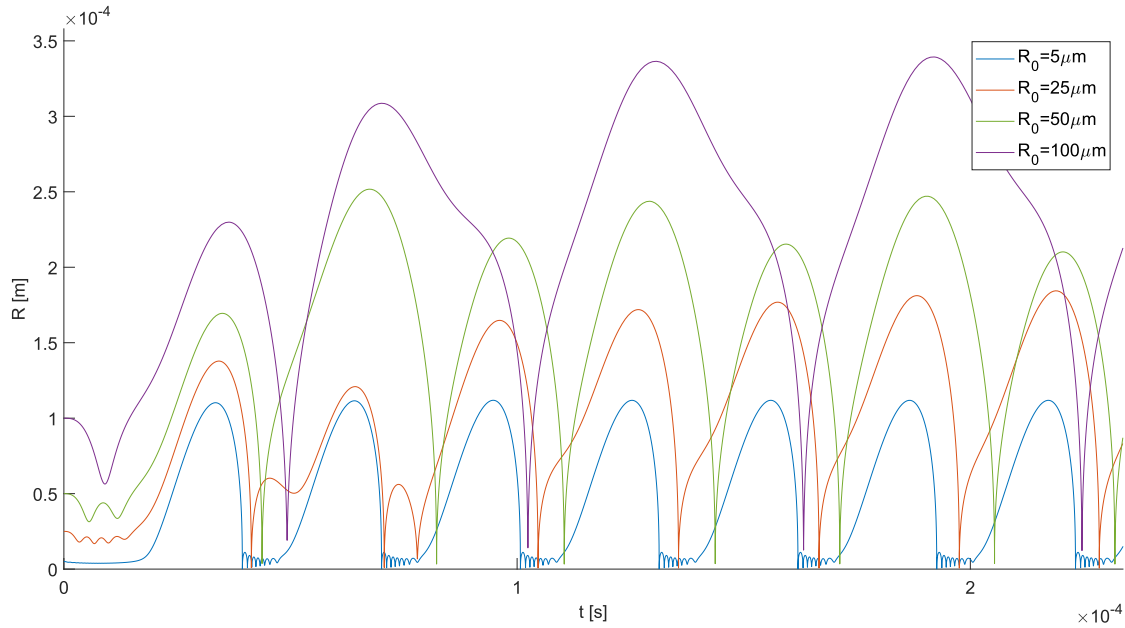


(a) $f = f_{0,25\mu m} = 1,328 \times 10^5 \text{ Hz}, A = 240 \text{ kPa}$

(b) $f = f_{0,50\mu m} = 6,568 \times 10^4 \text{ Hz}, A = 240 \text{ kPa}$

Obrázek 5.13: Oscilace bublin různých velikostí při stejné budicí frekvenci.

Při buzení o frekvenci $f = 3,266 \times 10^4 \text{ Hz}$, která je vlastní frekvencí bubliny $R_0 = 100 \mu m$ a která je zároveň nižší než vlastní frekvence všech ostatních bublin, kmitají všechny bubliny s velkou a neměnnou amplitudou (viz obr. 5.14). Ke kolapsu všech bublin dochází vždy zároveň, v krátkém časovém rozmezí. To se zdá být výhodné z hlediska využití kavitace, kdy energie uvolněná při kolapsu bublin se uvolňuje téměř ve stejný čas a na stejném místě.



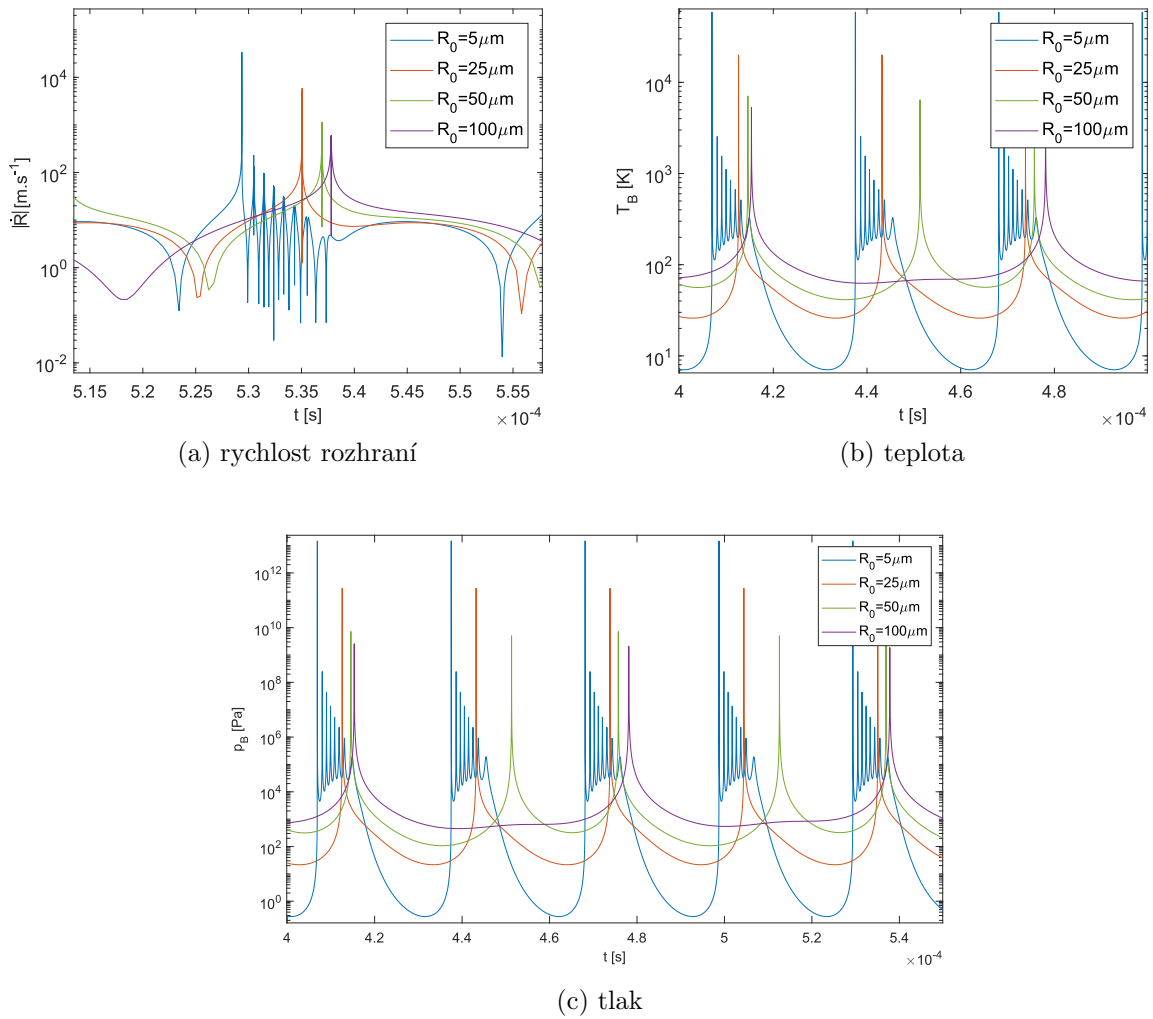
Obrázek 5.14: Oscilace bublin různých velikostí při stejné budící frekvenci.

$$f = f_{0,100\mu\text{m}} = 3,266 \times 10^4 \text{ Hz}, A = 240 \text{ kPa}$$

Jelikož při tomto buzení dochází ke kolapsu bublin všech čtyř vyšetřovaných rozměrů, byly mezi sebou dále porovnány. Na obr. 5.15 jsou zobrazeny průběhy rychlosti rozhraní bublin a průběhy teploty a tlaku uvnitř bublin. Jedná se o detaily průběhů vždy z části, kdy je kmitání všech bublin periodické. U všech parametrů platí, že čím menší bublina je, tím mají její parametry vyšší maximální hodnotu. Tyto maximální hodnoty jsou uvedeny v tab. 5.8.

Tabulka 5.8: Maximální hodnoty z průběhů na obr. 5.15

	$ \dot{R}_{\text{max}} \text{ (m.s}^{-1}\text{)}$	$T_{\text{max}} \text{ (K)}$	$p_{\text{max}} \text{ (Pa)}$
$R_0 = 5 \mu\text{m}$	33 536	58 896	$1,472 \times 10^{13}$
$R_0 = 25 \mu\text{m}$	5830	19 899	$2,701 \times 10^{11}$
$R_0 = 50 \mu\text{m}$	1252	7538	$8,786 \times 10^9$
$R_0 = 100 \mu\text{m}$	697	5311	$2,542 \times 10^9$



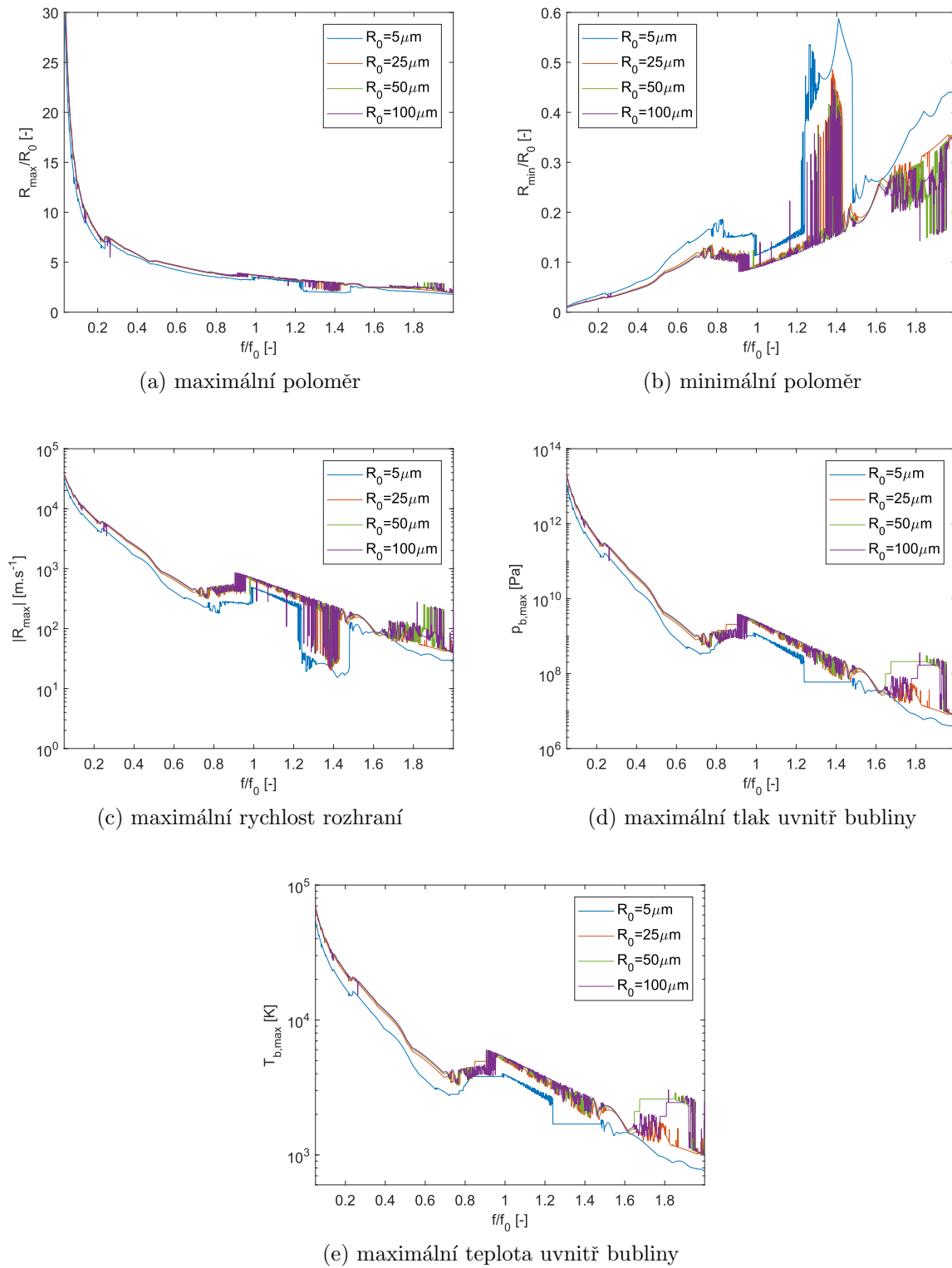
Obrázek 5.15: Podmínky uvnitř bublin. $p_a = 240$ kPa, $f = f_{0,100\mu m} = 3,266 \times 10^4$ Hz

5.4.3 Závislost maximálních hodnot na budicí frekvenci

Ze všech uvedených výpočtů vyplývá, že dynamika a chování kavitační bubliny je závislá především na poměru budicí frekvence ku vlastní frekvenci. Byly proto provedeny výpočty maximálního a minimálního poloměru, maximální rychlosti rozhraní bubliny a maximální teploty a tlaku uvnitř bubliny v závislosti na poměru f/f_0 .

Výpočty byly provedeny v intervalu $f/f_0 = (0; 2)$ s krokem 0,001. Tyto grafy jsou uvedeny na obr. 5.16.

Z těchto grafů vyplývá, že při stejném poměru f/f_0 jsou pro různé velikosti bublin všechny sledované parametry podobné. Ve všech případech se snižující budicí frekvencí hodnoty parametrů rostou a v okolí vlastní frekvence mají lokální maximum. Pro minimální poloměr to platí naopak – klesá a má zde lokální minimum. Růst (resp. klesání) potom pokračuje až do hodnot $f \rightarrow 0$. Takové buzení ovšem nemá z hlediska kavitace význam. Lze říci, že za účelem získání maximálních hodnot zde sledovaných parametrů pro široké spektrum velikosti kavitačních bublin, je vhodné jako budicí frekvenci zvolit vlastní frekvenci největší z bublin, které se při kavitaci vyskytují v dostatečné koncentraci.



Obrázek 5.16: Maximální hodnoty v závislosti na poměru f/f_0 . $p_a = 240\text{ kPa}$

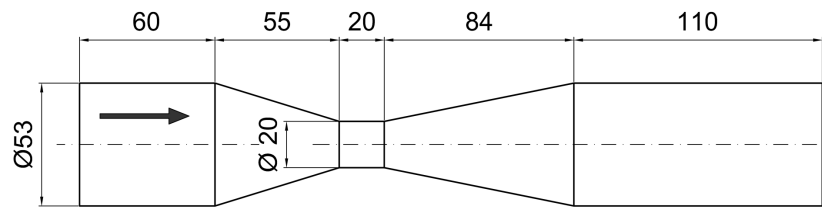
Program pro výpočet dynamiky kavitační bubliny v proměnném tlakovém poli je obsahem Přílohy 1 této práce.

6 Bublina při průchodu Venturiho dýzou

Pro výpočet dynamiky kavitační bubliny při průchodu Venturiho dýzou byl vytvořen Eulerovsko-Lagrangeovský model. Jedná se o kombinaci výpočtu dynamiky osamocené kavitační bubliny pomocí Gilmorovy rovnice a CFD výpočtu vícefázového proudění. Gilmorova rovnice je potom aplikovaná na proudnici, jejíž trajektorie a tlak kapaliny po její délce jsou získány z CFD výpočtu.

Program pro výpočet dynamiky kavitační bubliny při průchodu Venturiho dýzou je obsahem Přílohy 2 této práce.

Geometrie Venturiho dýzy (zobrazena na obr. 6.1) a hodnoty průtoku a tlaku za dýzou při kavitaci jsou získány z [30].



Obrázek 6.1: Geometrie Venturiho dýzy [30]

Výpočet byl proveden pro 2 hodnoty kavitačního čísla σ_k . Průtoky pro jednotlivé σ_k byly získány z dat uvedených v [30]. Tlak p_2 na výstupu z dýzy byl vypočten pomocí vztahu (6.1):

$$\sigma_k = \frac{2 \cdot (p_2 - p_v)}{\rho_L \cdot v_{hrdlo}^2}, \quad (6.1)$$

kde v_{hrdlo} je rychlost kapaliny v místě zúžení. Získané hodnoty průtoku a tlaku jsou uvedeny v tab. 6.1.

Tabulka 6.1: Hodnoty průtoku a tlaku pro kavitační čísla dle [30]

σ (-)	Q (l.s ⁻¹)	$p_{2, \text{abs}}$ (Pa)
0,8	5	103 478
0,42	7	106 411

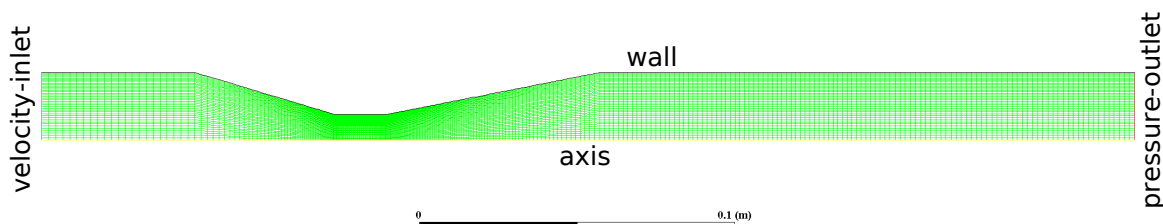
6.1 CFD výpočet proudění ve Venturiho dýze

Výpočet proudění byl proveden v programu Ansys Fluent 17.2. Byl řešen jako osově symetrický a vícefázový. Řešič byl nastaven na *Pressure-Based*. Použitý model turbulence byl *Realizable k-ε*, vícefázový model *Mixture* a kavitační model *Schnerr-Sauer*. Tyto modely jsou blíže popsány v části 6.1.1. Stěnové funkce byly nastaveny jako *Non-Equilibrium Wall Functions*. Úloha byla řešena nejprve jako stacionární, s prvními řády přesnosti. Po zkonvergování byla přepnuta na druhé řády přesnosti (viz tab. 6.2) a řešena jako transientní, s časovým krokem 0,001 s.

Tabulka 6.2: Použité metody řešení

Schéma:	SIMPLE
Prostorová diskretizace:	
Gradient:	Least Squares Cell Based
Tlak:	PRESTO!
Hybnost:	Second Order Upwind
Objemový zlomek:	First Order Upwind
Turbulentní kinetická energie k :	Second Order Upwind
Disipace turbulentní kinetické energie ε :	Second Order Upwind

Okrajové podmínky byly zadány jako *velocity-inlet* na vstupu do dýzy a *pressure-outlet* na výstupu s hodnotami, které jsou uvedeny v tab. 6.1. Výpočetní síť a okrajové podmínky jsou zobrazeny na obr. 6.2. Vlastnosti materiálů (vody a páry), které byly při výpočtu nastaveny jsou uvedeny v tab. 6.3.



Obrázek 6.2: Výpočetní síť a okrajové podmínky

Tabulka 6.3: Vlastnosti vody a páry při CFD výpočtu

Název parametru	Symbol	Hodnota
Teplota	T	288,16 K
Hustota vody	ρ_L	998,2 kg.m ⁻³
Dynamická viskozita vody	μ_L	$1,003 \times 10^{-3}$ Pa.s
Hustota páry	ρ_v	0,5542 kg.m ⁻³
Dynamická viskozita páry	μ_v	$1,34 \times 10^{-5}$ Pa.s
Tlak sytých par	p_v	2500 Pa

6.1.1 Použité modely

Model turbulence. Turbulentní proudění je popsáno rovnicí kontinuity (6.2) a RANS rovnicemi (Reynoldsovsy středované Navier-Stokesovy rovnice) (6.3). [31, 32]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = 0 \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{v}_i' \bar{v}_j'), \quad (6.3)$$

kde veličiny s čarou značí časově středované hodnoty. Poslední člen představuje Reynoldsova napětí. Ty lze užitím Boussinesqueovy hypotézy vyjádřit pomocí turbulentní viskozity μ_t . RANS rovnice má potom tvar: [32]

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) \right], \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} \nu_t &= \frac{\mu_t}{\rho} \\ p^* &= \bar{p} + \frac{2}{3}k \end{aligned}$$

Pro uzavření soustavy rovnic je nutné určit neznámou turbulentní viskozitu pomocí modelů turbulence. Výpočet byl proveden s využitím modelu *Realizable k-ε*, který určuje turbulentní viskozitu pomocí dvou transportních rovnic pro k a ε . Turbulentní viskozita je pro k - ε modely dána Prandtl-Kolmogorovým vztahem: [32]

$$\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (6.5)$$

Pro model *Realizable k-ε* jsou transportní rovnice dány vztahy (6.6) a (6.7): [31]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho k \bar{v}_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b - \rho \varepsilon - Y_M + S_k \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \varepsilon \bar{v}_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \rho C_1 S \varepsilon - \rho C_2 \frac{\varepsilon^2}{k + \sqrt{\nu \varepsilon}} + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} C_{3\varepsilon} G_b + S_\varepsilon \quad (6.7)$$

Veličiny $G_k, G_b, Y_M, S_k, S_\varepsilon, \sigma_\varepsilon, \sigma_k$ a konstanty $C_1, C_{1\varepsilon}, C_2$ a $C_{3\varepsilon}$ jsou blíže definovány v [31].

Vícefázový model. [33] Jako model dvoufázového proudění byl použit model *Mixture*. Pomocí tohoto modelu lze řešit proudění n fází pomocí pohybové rovnice a rovnice kontinuity pro směs, rovnice pro objemový zlomek druhých fází a algebraického vztahu pro relativní rychlost.

Rovnice kontinuity pro směs je dána vztahem:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_m v_{m,j})}{\partial x_j} = 0, \quad (6.8)$$

kde ρ_m je hustota směsi a $v_{m,j}$ jsou složky rychlosti zprůměrované podle hmotnosti, dány vztahem:

$$v_{m,j} = \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k \rho_k v_{k,j}}{\rho_m}. \quad (6.9)$$

Hustota směsi je dána následovně:

$$\rho_m = \sum_{k=1}^n \alpha_k \rho_k, \quad (6.10)$$

kde α_k je objemový zlomek fáze k .

Sečtením rovnic zachování hybnosti pro jednotlivé fáze se získá rovnice zachování hybnosti pro směs:

$$\frac{\partial(\rho_m v_{m,i})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho_m v_{m,i} v_{m,j}) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu_m \left(\frac{\partial v_{m,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_{m,j}}{\partial x_i} \right) - \mu \delta_{i,j} \frac{2}{3} \frac{\partial v_{m,l}}{\partial x_l} \right] + \rho f_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \rho_k v_{dr,k,i} v_{dr,k,j} \right), \quad (6.11)$$

kde n je počet fází, f_i složky vnějších hmotnostních sil, μ_m je dynamická viskozita směsi

$$\mu_m = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu_k \quad (6.12)$$

a $v_{dr,k,i}$ je složka unášivé rychlosti

$$v_{dr,k,i} = v_{k,i} - v_{m,i}. \quad (6.13)$$

Relativní rychlost mezi fázemi p a q je definována

$$v_{p,q,i} = v_{p,i} - v_{q,i}. \quad (6.14)$$

Jestliže hmotnostní zlomek fáze k je dán vztahem

$$c_k = \frac{\alpha_k \rho_k}{\rho_m}, \quad (6.15)$$

pak vztah mezi unášivou a relativní rychlostí je

$$v_{dr,p,i} = v_{p,q,i} - \sum_{k=1}^n c_k u_{k,q,i}. \quad (6.16)$$

Objemový zlomek sekundární fáze je dán rovnicí:

$$\frac{\partial(\alpha_p \rho_p)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_p \rho_p v_{m,j})}{\partial x_j} = -\frac{\partial(\alpha_p \rho_p v_{dr,p,j})}{\partial x_j} + \sum_{q=1}^n (Q_{m,qp} - Q_{m,pq}) \quad (6.17)$$

Kavitační model. [31] Jako kavitační model byl použit Schnerr-Sauer model. Obecný tvar rovnice pro objemový zlomek páry je následující:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha \rho_v) + \nabla \cdot (\alpha \rho_v \vec{v}) = \frac{\rho_v \rho_L}{\rho} \frac{D\alpha}{Dt} \quad (6.18)$$

Člen na pravé straně rovnice (6.18) představuje vztah pro rychlost přenosu hmoty R_m . Vztah mezi objemovým zlomkem páry a počtem bublin je:

$$\alpha = \frac{n_b \frac{4}{3} \pi R^3}{1 + n_b \frac{4}{3} \pi R^3} \quad (6.19)$$

Rovnice pro rychlost přenosu hmoty je potom v modelu Schnerr-Sauer dána vztahem (6.20) pro $p_L \leq p_v$ a vztahem (6.21) pro $p_L \geq p_v$.

$$R_m = \frac{\rho_v \rho_L}{\rho} \alpha (1 - \alpha) \frac{3}{R} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{p_v - p_L}{\rho_L}} \quad (6.20)$$

$$R_m = \frac{\rho_v \rho_L}{\rho} \alpha (1 - \alpha) \frac{3}{R} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{p_L - p_v}{\rho_L}}, \quad (6.21)$$

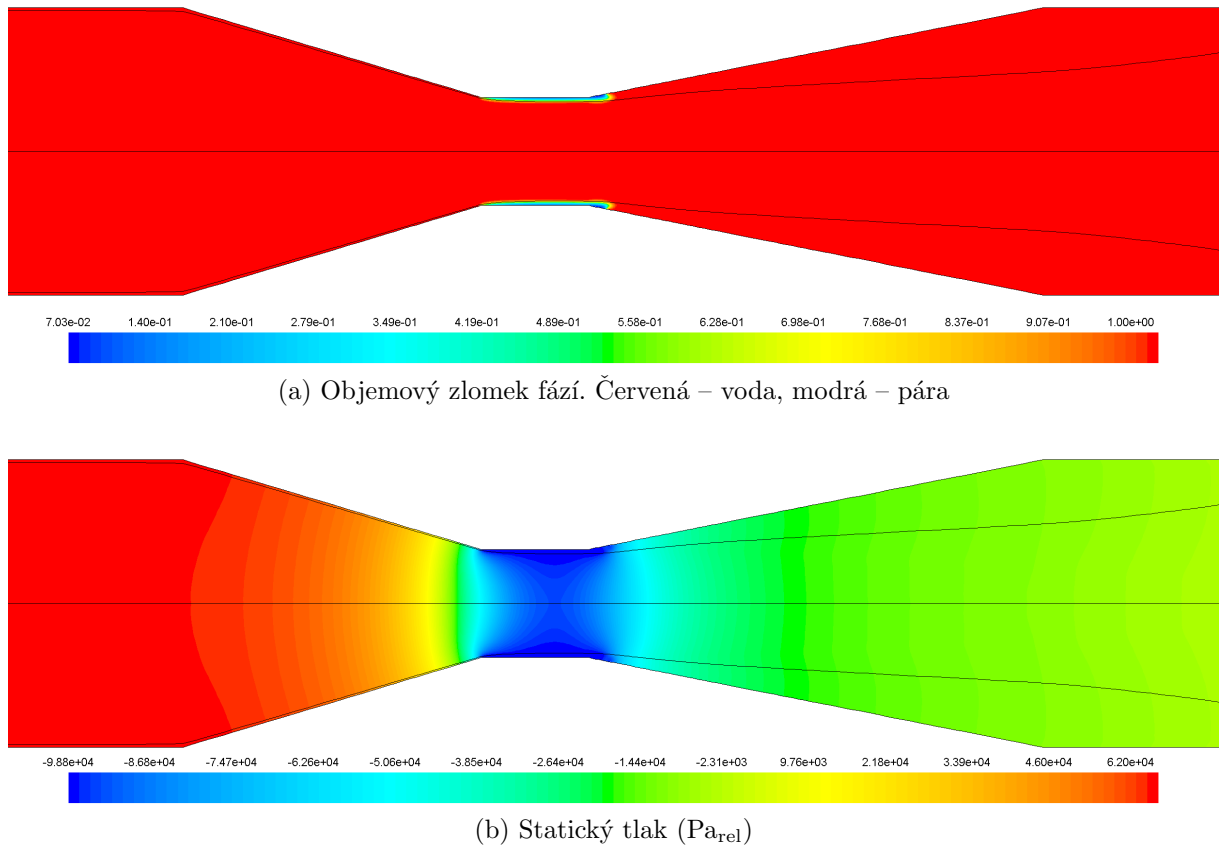
kde poloměr bublin R je v tomto případě vypočten dle vztahu (6.22):

$$R = \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{3}{4\pi n} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (6.22)$$

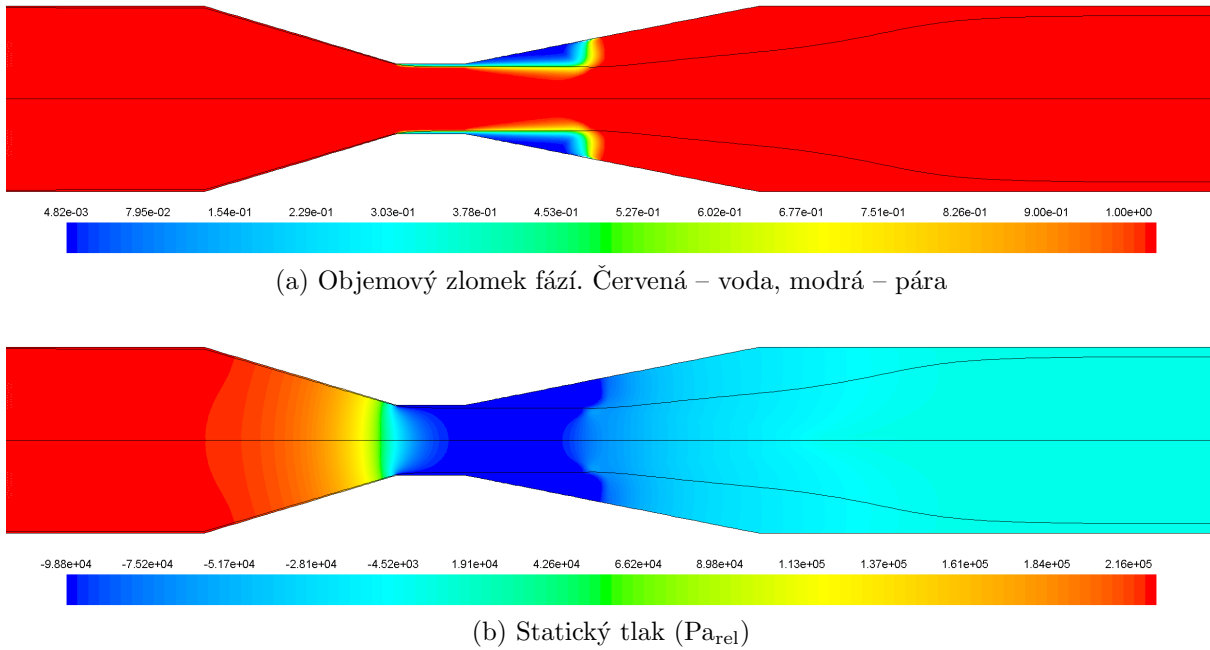
6.2 Výsledky řešení

Při řešení úlohy jako transientní bylo zjištěno, že se rozhraní mezi fázemi, vodou a párou, pohybuje jen nepatrně a pouze v axiálním směru. Díky tomu bylo možné úlohu zjednodušit na řešení v jednom konkrétním čase. Řešení dynamiky kavitační bubliny bylo provedeno pro dvě výše zmíněné hodnoty kavitačního čísla na dvou proudnicích. Jedna proudnice leží na ose trubice ($y = 0$ mm). Počáteční bod druhé proudnice leží 0,5 mm od stěny trubice, tj. $y = 26$ mm. Byla vykreslena trajektorie a tlak na těchto proudnicích, který slouží jako vstupní parametr pro výpočet bubliny Gilmoreovou rovnicí. Výpočet byl proveden pro 4 velikosti bublin ($R_0 = 5, 25, 50$ a 100 mm).

Na obr. 6.3 a 6.4 je zobrazeno rozložení fází a statického tlaku z obou výpočtů a jsou zakresleny proudnice.

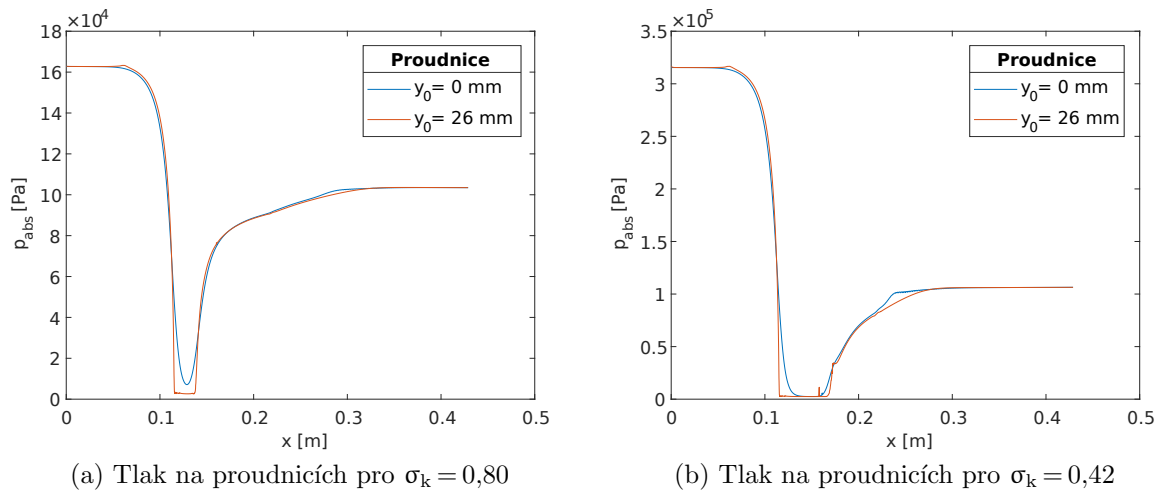


Obrázek 6.3: Rozložení fází a statického tlaku pro $\sigma_k = 0,80$



Obrázek 6.4: Rozložení fází a statického tlaku pro $\sigma_k = 0,42$

Průběh tlaku na proudnicích je zobrazen na obr. 6.5a a 6.5b. Zde je vidět, že při nižším kavitačním čísle a v blízkosti stěny klesá tlak na nižší hodnotu. Minimální hodnoty tlaků jsou uvedeny v tab. 6.4



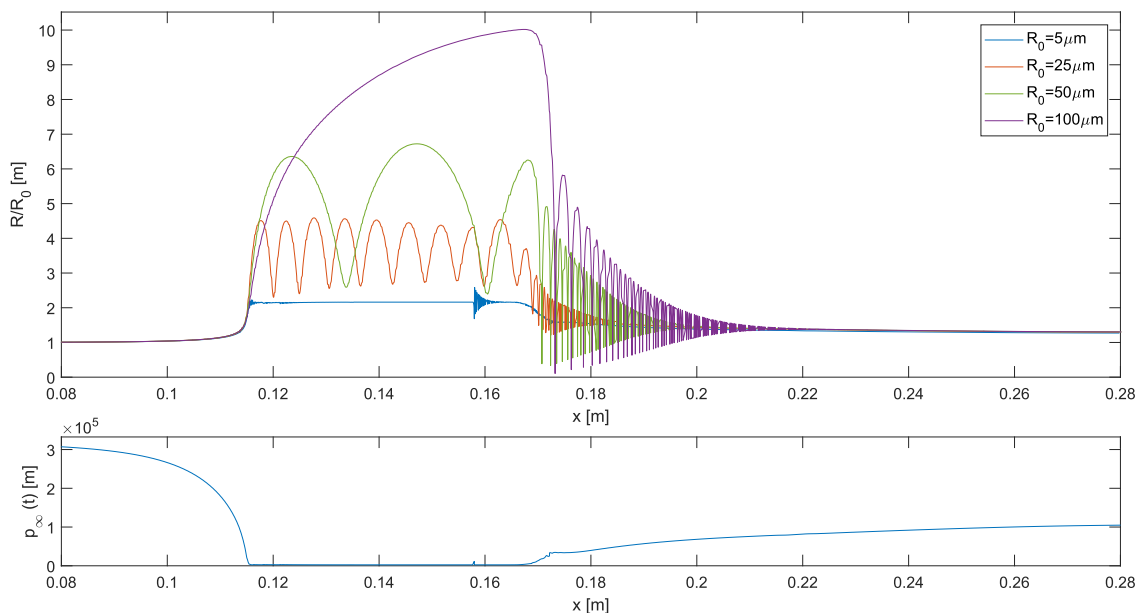
Obrázek 6.5: Průběh tlaku na proudnicích

Dle tohoto CFD výpočtu je dosaženo tlaku sytých par pouze na proudnici $y_0 = 26 \text{ mm}$ při $\sigma_k = 0,42$, která prochází místem, kde maximální objemový zlomek páry je $\alpha_v = 0,456$. Proudnice ležící na ose trubice neprochází místem obsahující parní fázi a minimální tlak je zde nepatrně vyšší než p_v . Proto bude dále vyšetřováno pouze proudění při $\sigma_k = 0,42$.

Tabulka 6.4: Minimální hodnoty statického tlaku

Kavitační číslo	Proudnice	Minimální tlak
σ_k (-)	y_0 (mm)	p_{abs} (Pa)
0,80	0	7136
0,80	26	2580
0,42	0	2512
0,42	26	2500

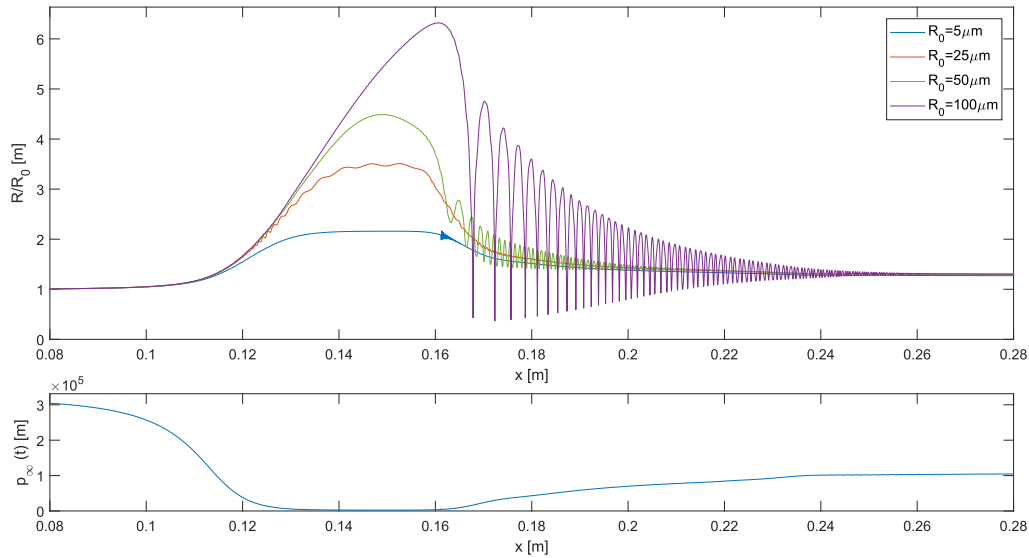
Obrázky 6.6 a 6.7 zachycují průběh poloměrů bublin na těchto proudnicích. V případě proudnice $y_0 = 26$ mm dochází ke kolapsu pouze u bublin $R_0 = 100 \mu\text{m}$ a $R_0 = 50 \mu\text{m}$. Nejmenší vyšetřovaná bublina vlivem své nejvyšší vlastní frekvence při poklesu tlaku zvětší svoji velikost, zakmitá a ustálí se v nové poloze. Po zvýšení tlaku dojde opět k jejímu zmenšení. Bublina $R_0 = 25 \mu\text{m}$ se chová podobně. V místě nízkého tlaku kmitá, ale nedojde k jejímu kolapsu. Zbylé dvě bubliny zkolabují, přičemž u větší bubliny je kolaps výraznější.



Obrázek 6.6: Průběh poloměru bublin při $\sigma_k = 0,42$ na proudnici $y_0 = 26$ mm

Na proudnici ležící na ose (obr. 6.7) zkolabuje pouze největší vyšetřovaná bublina $R_0 = 100 \mu\text{m}$. Ostatní se při průchodu místem minimálního tlaku pouze zvětší a nedojde téměř k žádnému zakmitání. Místo kolapsu bublin a jejich minimální poloměr je uveden v tab. 6.5.

Animace průběhu R , p_B a T_B těchto bublin jsou uvedeny v elektronické Příloze 3 této práce.

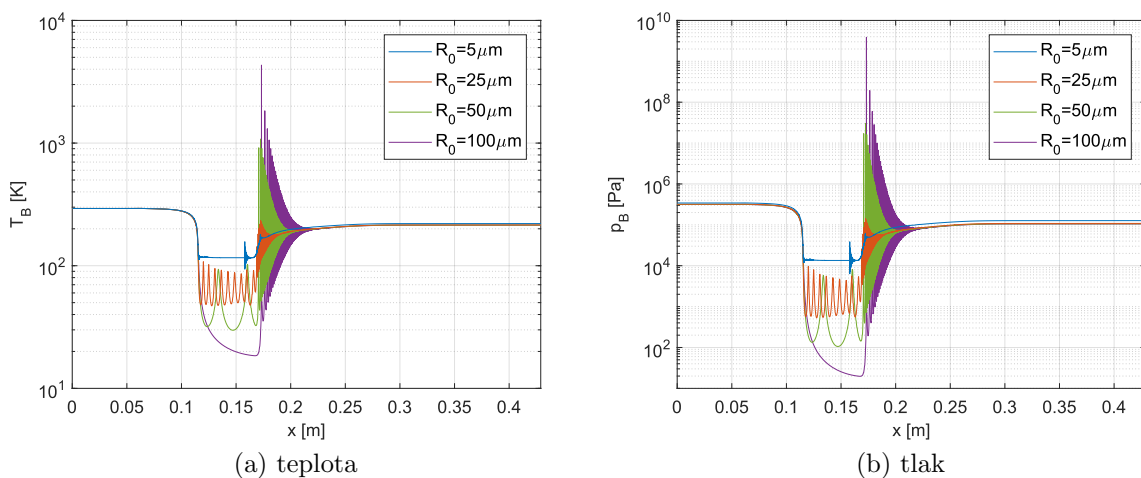


Obrázek 6.7: Průběh poloměru bublin při $\sigma_k = 0,42$ na proudnici $y_0 = 0$ mm

Tabulka 6.5: Místa kolapsu a minimální velikosti bublin

R_0 (μm)	y_0 (mm)	R_{\min}/R_0 (-)	x_{kolapsu} (mm)	t_{kolapsu} (ms)
100	26	0,106	173,2	33,6
50	26	0,338	170,7	33,4
100	0	0,366	167,8	28,6

Teplota a tlak uvnitř bublin na proudnici $y_0 = 26$ mm jsou zachyceny na obr. 6.8. Odtud vyplývá, že u bublin, u kterých nedojde ke kolapsu, se tyto hodnoty pouze sníží. Nejvyšších hodnot dosahuje bublina $R_0 = 100 \mu\text{m}$. Maximální hodnoty R , $|\dot{R}|$, p_B , T_B pro bubliny, u kterých došlo ke kolapsu, jsou uvedeny v tab. 6.6.



Obrázek 6.8: Teplota a tlak uvnitř bublin. $\sigma_k = 0,42$, $y_0 = 26$ mm

Průběhy R , p_B a T_B všech jednotlivých bublin pro $\sigma_k = 0,42$ jsou uvedeny v Příloze 4.

Tabulka 6.6: Maximální hodnoty $R, |\dot{R}|, p_B, T_B$ pro kolabující bubliny

R_0 (μm)	y_0 (mm)	R_{\max}/R_0 (-)	$ \dot{R} _{\max}$ (m.s ⁻¹)	$p_{B,\max}$ (Pa)	$T_{B,\max}$ (K)
100	26	10,019	840,327	$3,878 \times 10^9$	4321
50	26	6,723	76,789	$3,028 \times 10^7$	1079
100	0	6,320	64,705	$2,140 \times 10^7$	979

6.2.1 Disipovaná energie

Z vypočteného průběhu poloměru bubliny lze dopočítat disipovanou energii, která se při kavitaci projevuje z největší části jako rázová vlna, která se šíří od středu bubliny od počátku fáze dokmitávání. Tuto energii lze získat výpočtem práce tlaku plynu uvnitř bubliny p_B vůči tlaku okolní kapaliny p_∞ mezi minimálním R_{\min} a maximálním R_{\max} poloměrem při každém kolapsu. Pokud je zanedbáno povrchové napětí, viskozita a stlačitelnost, tato práce se vypočte následovně: [29]

$$W = \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} 4\pi R_B^2 (p_\infty - p_B) dR \quad (6.23)$$

Disipovaná energie během jednoho kolapsu se potom vypočte jako rozdíl prací W dvou po sobě jdoucích kolapsů: [29]

$$E_i = W \Big|_{R_{\min,i}}^{R_{\max,i}} - W \Big|_{R_{\min,i+1}}^{R_{\max,i+1}} \quad (6.24)$$

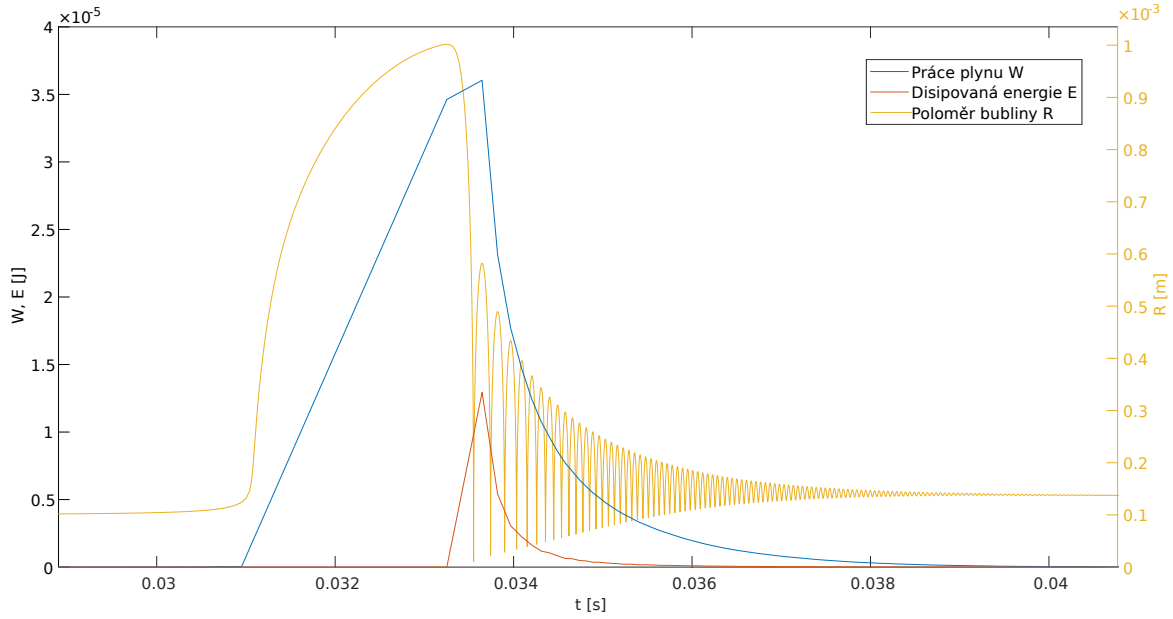
Součtem energií všech kolapsů se získá celková energie disipovaná jednou kavitační bublinou při průchodu dýzou:

$$E_{\text{celk}} = \sum_{i=1}^n E_i \quad (6.25)$$

Průběh práce plynu W a disipované energie E v čase pro tuto bublinu je zobrazen na obr. 6.9. V tab. 6.7 jsou uvedeny hodnoty celkové energie při průchodu jedné bubliny dýzou. Opět nejvyšší hodnoty dosahuje bublina $R_0 = 100 \mu\text{m}$ na proudnici $y_0 = 26 \text{ mm}$.

Tabulka 6.7: Celková disipovaná energie E_{celk} (J) při $\sigma_k = 0,42$

	Proudnice	
	$y_0 = 0 \text{ mm}$	$y_0 = 26 \text{ mm}$
$R_0 = 5 \mu\text{m}$	$1,355 \times 10^{-11}$	$1,567 \times 10^{-10}$
$R_0 = 25 \mu\text{m}$	$4,430 \times 10^{-9}$	$4,444 \times 10^{-8}$
$R_0 = 50 \mu\text{m}$	$1,553 \times 10^{-7}$	$2,266 \times 10^{-6}$
$R_0 = 100 \mu\text{m}$	$1,489 \times 10^{-5}$	$3,616 \times 10^{-5}$



Obrázek 6.9: Práce plynu a disipovaná energie bubliny.
 $R_0 = 100 \mu\text{m}$, $y_0 = 26 \text{ mm}$, $\sigma_k = 0,42$

6.2.2 Skutečná trajektorie bubliny

Skutečná trajektorie bubliny se od proudnice kapaliny liší. Hlavními silami, které na bublinu působí a tím ji odchyľují od proudnice jsou síla tíhová, síla přidané hmotnosti, tlaková síla a odporová síla. Při uvažování těchto sil, má pohybová rovnice bubliny následující tvar: [2]

$$M\dot{\vec{v}}_B = -2M\vec{g} + 3M\dot{\vec{v}}_L - \dot{M}(\vec{v}_B - \vec{v}_L) + \vec{D} \quad (6.26)$$

kde M je přídavná hmotnost

$$M = \frac{2}{3}\pi\rho R^3, \quad (6.27)$$

$$\dot{M} = 2\pi\rho_L R^2 \dot{R}, \quad (6.28)$$

a \vec{D} odporová síla:

$$\vec{D} = -C_D\pi R^2 \frac{\rho(v_B - v_L)^2}{2} \frac{\vec{v}_B - \vec{v}_L}{|v_B - v_L|}. \quad (6.29)$$

C_D je koeficient odporu, který je pro malé bubliny, jejichž Reynoldsovo číslo Re je malé, dán následujícím vztahem: [2]

$$C_D = \frac{24}{Re}$$

$$Re = \frac{2\rho_L(v_B - v_L)R}{\mu_L}.$$

Kombinací pohybové rovnice bubliny (6.26) s Gilmoreovou rovnicí (2.6) a známým tlakovým a rychlostním polem z CFD výpočtu je možné integrací získat skutečnou trajektorii bubliny a její velikost v čase.

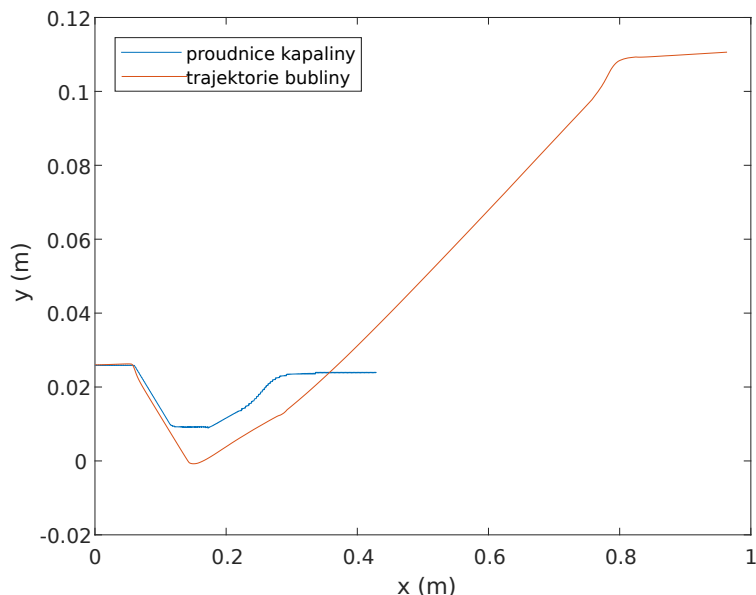
Tyto rovnice byly naprogramovány v Matlabu a řešeny jako soustava 3 diferenciálních rovnic druhého řádu (1 rovnice Gilmorova a 2 rovnice pro x a y složku pohybové rovnice).

Skutečnou trajektorii se ovšem nepodařilo vypočítat. Výsledná trajektorie bubliny je velmi podobná trajektorii kapaliny až do místa zúžení trubice. Zde začíná bublina oscilovat a dle výpočtu zde prudce změni směr a zvýší svoji rychlost na několiknásobek rychlosti kapaliny. Takové chování je však nereálné. Chybu se nepodařilo identifikovat.

Bylo provedeno zjednodušení problému na řešení proudnice, jejíž trajektorie byla dána rovnicí pro rovnoměrně zrychlený pohyb a poloměr bubliny byl konstantní. V tomto případě výpočet proběhl bez problému, bublina byla za kapalinou zpožděna. I v případě, že poloměr nebyl v čase konstantní, ale jeho velikost byla dána funkcí sinus, výpočet byl úspěšný. Ovšem při aplikaci výpočtu na rychlosti z CFD řešení se trajektorie bubliny začala chovat nepředvídatelně.

Bylo zjištěno, že při zanedbání členu \dot{M} v rovnici (6.26) je trajektorie bližší trajektorii kapaliny, ovšem stále zde vychází rychlost bubliny vyšší, než rychlost kapaliny.

Tato trajektorie je zobrazena na obr. 6.10. Jedná se o výpočet bubliny o $R_0 = 100 \mu\text{m}$ na proudnici $y_0 = 26 \text{ mm}$, kavitační číslo $\sigma_k = 0,42$.



Obrázek 6.10: Porovnání proudnice kapaliny a vypočtené trajektorie bubliny

7 Plynový měchýřek v proměnném v tlakovém poli

Pro řešení chování plynových měchýřků bylo využito modelu Qin-Ferrara (3.3). Pro výpočet byla vybrána sinice *Anabaena flos-aquae*. Průměr plynových měchýřků této sinice je 84 nm. Jelikož je délka měchýřků proměnlivá, byla jako střední hodnota zvolena délka 500 nm.

Další parametry použité při výpočtu jsou uvedeny v tab. 7.1. Z hlediska vlastností membrány je kromě známých hodnot modulu pružnosti v tahu a její tloušťky nutné pro výpočet určit i její hustotu, viskozitu a povrchové napětí. Tyto hodnoty se ovšem v dostupné literatuře nepodařilo dohledat. Jsou proto použity hodnoty pro protein albumin, uvedené v [16]. Z hlediska dynamiky nebude mít tato nepřesnost velký význam, jelikož hlavním parametrem, který ovlivňuje chování plynového měchýřku je modul pružnosti, jehož hodnota je řádově vyšší.

Tabulka 7.1: Vlastnosti plynového měchýřku

Název parametru	Symbol	Hodnota
Průměr měchýřku	D_{pm}	84 nm
Délka měchýřku	l_{pm}	500 nm
Tloušťka membrány	δ_S	1,95 nm
Modul pružnosti v tahu	E	2,8 GPa
Poissonova konstanta	ν	0,33
Hustota membrány	ρ_S	1100 kg.m ⁻³
Viskozita membrány	μ_S	1,77 Pa.s
Povrchové napětí	σ_2	0,056 N.m ⁻¹
	σ_1	0,04 N.m ⁻¹

Komplikací při tomto výpočtu je, že plynové měchýřky sinic mají tvar válce, ale výpočtový model je odvozený pro kulovou bublinu. Původním záměrem bylo nahradit plynový měchýřek kulovou bublinou o stejném objemu dle vztahu (7.1):

$$\begin{aligned}
 V_B &= V_{pm} \\
 \frac{4}{3}\pi R_0^3 &= \frac{1}{4}\pi D_{pm}^2 l_{pm} \\
 R_0 &= \sqrt[3]{\frac{3}{16} D_{pm}^2 l_{pm}}
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Vypočtený počáteční poloměr je potom (7.1) $R_0 = 87,132$ nm. Pro bublinu těchto parametrů vychází dle vztahu (3.1) počáteční tlak uvnitř bubliny s membránou:

$$p_{B0} = 2,35 \text{ MPa}$$

Ovšem dle tab. 3.1 je tlak uvnitř plynového měchýřku tohoto druhu sinic $p_{pm} = 0,43$ MPa. Byl proto zvolen počáteční poloměr takový, aby počáteční tlak uvnitř bubliny odpovídal skutečnému tlaku uvnitř plynového měchýřku:

$$R_0 = 590 \text{ nm}$$

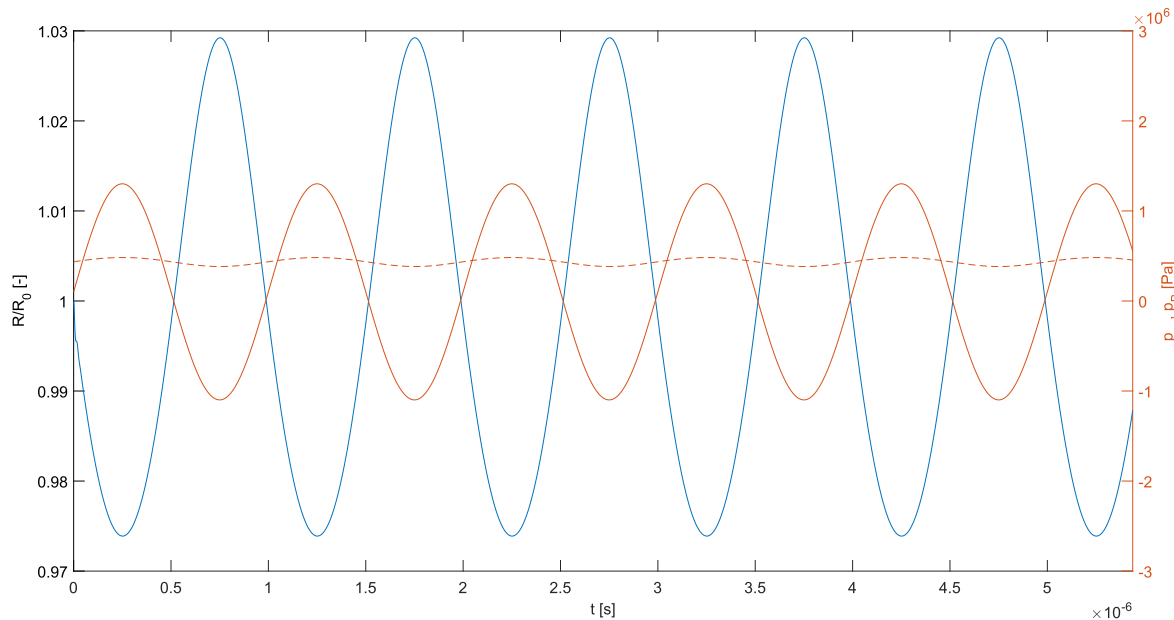
Pro tento poloměr vychází $p_{B0} = 0,432$ MPa. Vlastní frekvence tohoto plynového měchýřku je dle vztahu (3.4) rovna $f_0 = 56,352$ MHz.

Budicí tlak je stejně jako u bublin při akustické kavitaci dán funkcí sinus (dle vztahu (5.6)). Amplituda budicího tlaku a frekvence jsou zvoleny dle [16] jako typické hodnoty při buzení mikrobublin s membránou:

$$p_a = 1,2 \text{ MPa}$$

$$f = 1 \text{ MHz}$$

Na obr. 7.1 je zobrazen průběh poloměru, budicího tlaku a tlaku uvnitř tohoto plynového měchýřku (zaznačen čárkovaně). Zde je vidět, že plynový měchýřek periodicky osciluje s velmi malou, konstantní amplitudou. Fáze kmitání je shodná s fází budicího tlaku. V tab. 7.2 jsou uvedeny minimální a maximální hodnoty R , $|\dot{R}|$, p_B a T_B vypočtené pro tento případ.



Obrázek 7.1: Kmitání plynového měchýřku sinice *Anabaena flos-aquae*.
 $f = 1$ MHz, $p_a = 1,2$ MPa

Tabulka 7.2: Minimální a maximální hodnoty

Veličina	Jednotka	Minimum	Maximum
R/R_0	-	0,974	1,030
$ \dot{R} $	m.s ⁻¹	0	0,376
p_B	MPa	0,383	0,483
T_B	K	283,2	302,6

Pro jiné budicí frekvence zůstávají tvar i amplituda oscilace stále stejné. Pouze při buzení vlastní frekvencí se amplituda oscilace zvýší na $R_{max}/R_0 = 1,045$, $R_{min}/R_0 = 0,956$.

Z těchto výsledků vyplývá, že se plynové měchýřky sinic nechovají jako kavitační bubliny a nedochází u nich ke kolapsu vlivem jejich dynamiky. Destrukce plynových měchýřků je způsobena překročením kritického tlaku. Maximum rozdílu tlaku kapaliny a tlaku uvnitř bubliny je v tomto případě

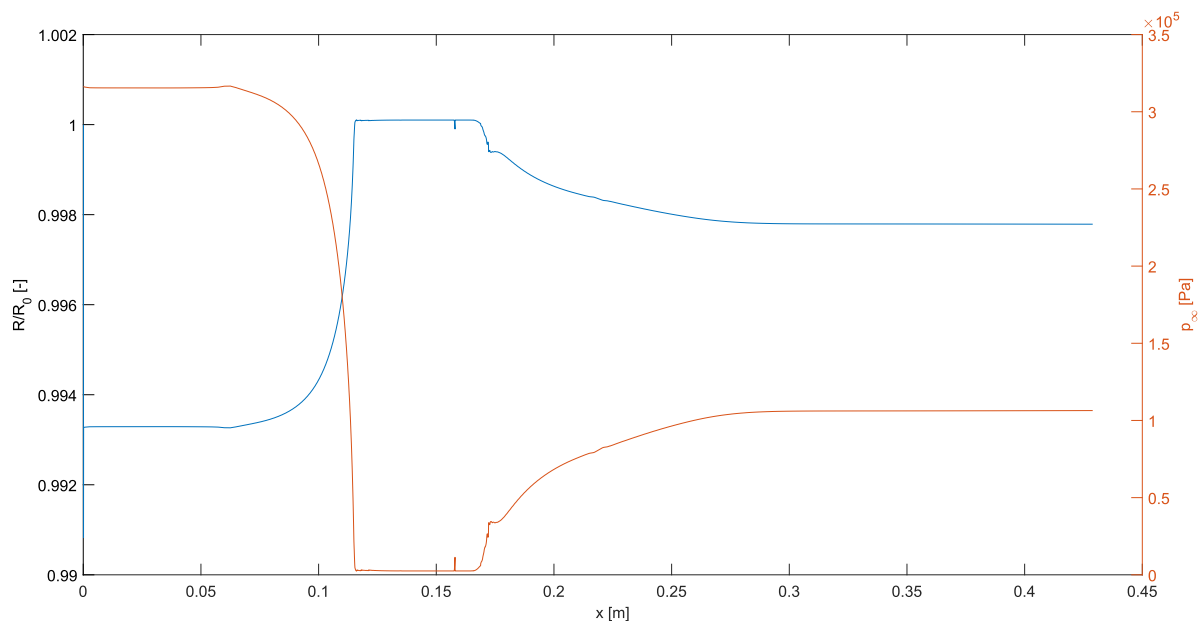
$$(p_{\infty} - p_B)_{max} = 0,819 \text{ MPa},$$

které je vyšší než kritický tlak pro plynové měchýřky sinic *Anabaena flos-aquae*, jehož hodnota je $p_c = 0,6 \text{ MPa}$. Tlak kapaliny je navíc zvyšován kolabujícími bublinami v okolí sinic.

7.1 Plynový měchýřek při průchodu Venturiho dýzou

Pro simulaci chování plynového měchýřku při hydrodynamické kavitaci byla aplikována rovnice pro MBM i na CFD výpočet z kapitoly 6. Byl proveden výpočet plynového měchýřku se stejnými parametry jako v předchozí části, na proudnici $y_0 = 26 \text{ mm}$ při proudění s kavitačním číslem $\sigma_k = 0,42$.

Průběh poloměru vzhledem k tlaku kapaliny je znázorněn na obr. 7.2. Nedochází zde k žádnému kmitání a poloměr bubliny se mění přesně s okolním tlakem kapaliny. Změna parametrů uvnitř měchýřku je proto zanedbatelná.



Obrázek 7.2: Plynový měchýřek sinice *Anabaena flos-aquae* při průchodu Venturiho dýzou. $R_0 = 590 \text{ nm}$, $\sigma_k = 0,42$, $y_0 = 26 \text{ mm}$

K destrukci plynových měchýřků tedy při hydrodynamické kavitaci nedochází přímo působením tlaku kapaliny, ale v důsledku zvýšení tlaku vlivem kolabujících bublin v okolní kapalině nad hodnotu kritického tlaku p_c .

Program pro výpočet plynových měchýřků při akustické a hydrodynamické kavitaci je součástí Příloh 1 a 2.

ZÁVĚR

Tato práce se zabývala numerickým řešením dynamiky osamocené kavitační bubliny a plynového měchýřku sinice při akustické a hydrodynamické kavitaci.

Úvodní část práce je zaměřena na Rayleigh-Plessetovu rovnici a rešerši jejích modifikací, jejichž výsledky jsou přesnější díky zahrnutí vlivu stlačitelnosti kapaliny. Zvláštní kapitola se věnuje mikrobublinám s membránou a především plynovým měchýřkům sinic a jejich vlastnostem. Následně je uvedena modifikace Rayleigh-Plessetovy rovnice, která zahrnuje vliv tenké elastické membrány těchto bublin.

Jelikož se ve všech případech jedná o obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu, které je nutné řešit numericky, je v další části provedena rešerše numerických metod se zaměřením na ty, které jsou implementované v programu Matlab.

Na základě poznatků z rešeršní části této práce byl v Matlabu vytvořen program pro řešení dynamiky kavitační bubliny v proměnném tlakovém poli. Po řadě výpočtů byla vybrána nejvhodnější numerická metoda (Adams-Bashforth-Moultonova) a nejvhodnější modifikace Rayleigh-Plessetovy rovnice (Gilmoreův model).

Následně byly prováděny výpočty pro čtyři referenční velikosti bubliny a bylo zkoumáno jejich chování při různém buzení. Bylo zjištěno, že tvar kmitání rozhraní bubliny závisí především na poměru mezi budicí a vlastní frekvencí konkrétní bubliny. Z výpočtů dále vyplývá, že největších amplitud oscilace a nejprudších kolapsů (a tím pádem i nejvyšších teplot a tlaků) je dosaženo při buzení frekvencemi nižšími než je vlastní frekvence bubliny.

Další kapitola se zabývá řešením dynamiky bublin při hydrodynamické kavitaci. Pro tento účel byl vytvořen Eulerovsko-Lagrangeovský model jako kombinace CFD výpočtu a řešení dynamiky jediné bubliny. Byl proveden CFD výpočet dvoufázového proudění ve Venturiho dýze, za využití její osové symetrie. Zjištěné hodnoty statického tlaku na dvou proudnicích byly poté použity jako vstupní hodnoty pro výpočet pomocí Gilmoreovy rovnice. Proudnice, na kterých tlak dosáhl tlaku sytých par, nebo se k této hodnotě blížil, byly dále vyšetřovány. Dle výpočtu Gilmoreovou rovnicí dochází ke kolapsu pouze u větších vyšetřovaných bublin, zatímco bubliny o menším počátečním poloměru při poklesu tlaku pouze zvětší svůj poloměr a při následném zvýšení tlaku se opět zmenší, aniž by zkolabovaly. Následně byla vypočtena energie disipovaná při kolapsu bublin. Největší hodnota disipované energie byla u největší bubliny $R_0 = 100 \mu\text{m}$. Jelikož na pohybující se bublinu působí ve skutečnosti síly, které ji odchyľují od proudnice kapaliny, byla v dalším bodě řešena s Gilmoreovou rovnicí i pohybová rovnice bubliny. Bohužel se při zkombinování s daty z CFD výpočtu nepodařilo dosáhnout výsledků, které by mohly odpovídat skutečnosti. Výpočet havaruje kvůli numerické nestabilitě.

Poslední část této práce se věnuje chování plynových měchýřků sinic. Bylo zjištěno, že při hydrodynamické kavitaci dojde pouze k nepatrným změnám velikosti měchýřku a nedojde k jeho oscilaci. Při akustické kavitaci dojde k oscilaci plynového měchýřku, avšak ne k jeho kolapsu. Z toho je usuzováno, že jednou z příčin destrukce plynových měchýřků je překročení hodnoty kritického tlaku, který je vlastností daného druhu sinic. K takovému nárůstu tlaku dochází vlivem kolabujících bublin v blízkosti sinice, nebo díky vysoké amplitudě budicího tlaku. Dalšími příčinami zničení měchýřků může být například microjet nebo vysoká teplota způsobené kolabujícími bublinami.

Při dalším zkoumání dynamiky kavitačních bublin bude vhodné vytvořit Eulerovsko-Lagrangeovský model pro hydrodynamickou kavitaci, který bude zahrnovat 3D CFD výpočet proudění a výpočet skutečné trajektorie bubliny v kapalině. Tento model bude poté použit pro tvorbu modelu kavitační eroze.

SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] BRENNEN, C.E. *Cavitation and Bubble Dynamics*. New York: Oxford University Press, 1995. ISBN 0195094093.
- [2] FRANC, J.P. a J.M. MICHEL. *Fundamentals of Cavitation*. Springer, 2006. ISBN 978-1-4020-2233-3.
- [3] WALSBY, A.E. *Gas vesicles. Microbiological reviews*. 1994, 58(1), 94-144.
- [4] LIU, Y. a Q. WANG. *Stability and natural frequency of nonspherical mode of an encapsulated microbubble in a viscous liquid*. Physics of fluids. 2016, 28, 20.
- [5] BRDIČKA, Miroslav, Oldřich TARABA a Ladislav SAMEK. *Kavitace: diagnostika a technické využití*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1981. Technická knihovna inženýra.
- [6] NOSKIEVIČ, Jaromír. *Kavitace v hydraulických strojích a zařízeních*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1990.
- [7] DINDAR, E. An Overview of the Application of Hydrodynamic Cavitation for the Intensification of Wastewater Treatment Applications: A Review. *Innovative Energy & Research*. 2016, 5(1). ISSN 2576-1463.
- [8] BUTCHER, J. C. *Numerical methods for ordinary differential equations*. Third edition. Chichester, West Sussex, United Kingdom: Wiley, 2016. ISBN 978-111-9121-503.
- [9] MOLER, Cleve B. *Numerical computing with MATLAB*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, c2004. ISBN 978-0898715606.
- [10] ČERMÁK, Libor. *Numerické metody pro řešení diferenciálních rovnic*. Brno: Litera Brno, 2013. ISBN 80-903-5867-5.
- [11] ČERMÁK, Libor. *Numerické metody II: diferenciální rovnice*. Vyd. 2., upr. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2010. ISBN 978-80-214-4110-1.
- [12] ATKINSON, Kendall, Weimin HAN a David STEWART. *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*. Chichester: Wiley, 2011. ISBN 978-111-8164-525.
- [13] The MathWorks, Inc.: *MATLAB® Mathematics, R2018a* [online], [cit. 2018-03-26]. Dostupné z: https://www.mathworks.com/help/pdf_doc/matlab/math.pdf
- [14] VOKURKA, K. Comparison of Rayleigh's, Herring's, and Gilmore's Models of Gas Bubbles. *Acustica*. 1986, 59(3), 214-219.
- [15] FRANC, Jean-Pierre. The Rayleigh-Plesset equation: a simple and powerful tool to understand various aspects of cavitation. Course. In: *International Centre for Mechanical Sciences (CISM)* [online]. 2005 [cit. 2018-04-16].
- [16] QIN, Shengping a Katherine W. FERRARA. A model for the dynamics of ultrasound contrast agents in vivo. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2010, 128(3), 1511-1521. DOI: 10.1121/1.3409476. ISSN 00014966. Dostupné také z: <http://scitation.aip.org/content/asa/journal/jasa/128/3/10.1121/1.3409476>

- [17] FUSTER, D., C. DOPAZO a G. HAUKE. Liquid compressibility effects during the collapse of a single cavitating bubble. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2011, **129**(1), 122-131. DOI: 10.1121/1.3502464. ISSN 0001-4966. Dostupné také z: <http://asa.scitation.org/doi/10.1121/1.3502464>
- [18] JANČULA, Daniel, Přemysl MIKULA, Blahoslav MARŠÁLEK, Pavel RUDOLF a František POCHYLÝ. Selective method for cyanobacterial bloom removal: hydraulic jet cavitation experience. *Aquaculture International*. 2014, **22**(2), 509-521. DOI: 10.1007/s10499-013-9660-7. ISSN 0967-6120. Dostupné také z: <http://link.springer.com/10.1007/s10499-013-9660-7>
- [19] PFEIFER, Felicitas. Distribution, formation and regulation of gas vesicles. *Nature Reviews Microbiology*. 2012, **10**(10), 705-715. DOI: 10.1038/nrmicro2834. ISSN 1740-1526. Dostupné také z: <http://www.nature.com/articles/nrmicro2834>
- [20] BELENKY, Marina, Rebecca MEYERS a Judith HERZFELD. Subunit Structure of Gas Vesicles: A MALDI-TOF Mass Spectrometry Study. *Biophysical Journal*. 2004, **86**(1), 499-505. DOI: 10.1016/S0006-3495(04)74128-4. ISSN 00063495. Dostupné také z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0006349504741284>
- [21] PAVELEK, Milan a kol. *Termomechanika*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2011, 192 s.; 30 cm diagramy ([3] složené l.). ISBN 978-80-214-4300-6.
- [22] KELLER, Joseph B. a Michael MIKSIS. Bubble oscillations of large amplitude. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1980, **68**(2), 628-633. DOI: 10.1121/1.384720. ISSN 0001-4966. Dostupné také z: <http://asa.scitation.org/doi/10.1121/1.384720>
- [23] TOMITA, Yukio a Akira SHIMA. On the Behavior of a Spherical Bubble and the Impulse Pressure in a Viscous Compressible Liquid. *Bulletin of JSME*. 1977, **20**(149), 1453-1460. DOI: 10.1299/jsme1958.20.1453. ISSN 1881-1426. Dostupné také z: <http://joi.jlc.jst.go.jp/JST.Journalarchive/jsme1958/20.1453?from=CrossRef>
- [24] ALEHOSSEIN, H. a Z. QIN. Numerical analysis of Rayleigh–Plesset equation for cavitating water jets. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2007, **72**(7), 780-807. DOI: 10.1002/nme.2032. ISSN 00295981. Dostupné také z: <http://doi.wiley.com/10.1002/nme.2032>
- [25] MIKOFSKI, Mark. *IAPWS-IF97 functional form with no slip* [online]. [cit. 2018-05-05]. Dostupné z: <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/35710-iapws-if97-functional-form-with-no-slip>
- [26] *The International Association for the Properties of Water and Steam: Revised Release on Surface Tension of Ordinary Water Substance* [online]. [cit. 2018-05-05]. Dostupné z: <http://www.iapws.org/relguide/Surf-H2O-2014.pdf>
- [27] HOFF, SONTUM a HOVEM. Oscillations of polymeric microbubbles: effect of the encapsulating shell. *The Journal of the Acoustical Society of America* [online]. 2000, **107**(4), 2272 [cit. 2018-05-06]. DOI: 10.1121/1.428557.

- [28] SEDLÁŘ, Milan, Martin KOMÁREK, Michal VYROUBAL a Miloš MÜLLER. Experimental and numerical analysis of cavitating flow around a hydrofoil. *EPJ Web of Conferences*. 2012, **25**, 01084-. DOI: 10.1051/epjconf/20122501084. ISSN 2100-014X. Dostupné také z: <http://www.epj-conferences.org/10.1051/epjconf/20122501084>
- [29] ZIMA, Patrik, Milan SEDLÁŘ a Miloš MÜLLER. Modeling collapse aggressiveness of cavitation bubbles in hydromachinery. In: *Proceedings of the 7th International Symposium on Cavitation, CAV2009*. Ann Arbor, Michigan, USA, 2009, s. 1-7.
- [30] KOZÁK, Jiří, Pavel RUDOLF, David ŠTEFAN, Martin HUDEC a Milan GRÍGER. ANALYSIS OF PRESSURE PULSATIONS OF CAVITATING FLOW IN CONVERGING-DIVERGING NOZZLE. In: *IAHR WG Meeting on Cavitation and Dynamic Problems in Hydraulic Machinery and Systems*. Ljubljana, 2015, s. 1-8.
- [31] *ANSYS Fluent Theory Guide* [online]. 2013 [cit. 2018-04-17]. Dostupné z: <http://www.pmt.usp.br/ACADEMIC/martoran/NotasModelosGrad/ANSYS%20Fluent%20Theory%20Guide%2015.pdf>
- [32] RUDOLF, Pavel. *Přednášky z předmětu Výpočtové modelování proudění*. Brno, 2017.
- [33] KOZUBKOVÁ, Milada. *Modelování proudění tekutin FLUENT, CFX* [online]. Ostrava: Vysoká škola báňská - Technická univerzita, 2008 [cit. 2018-05-17]. ISBN 978-80-248-1913-6.

SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ

CFD	Computational Fluid Dynamics	
EE	explicitní Eulerova (metoda)	
IE	implicitní Eulerova (metoda)	
ODR	obyčejná diferenciální rovnice	
RK	Runge-Kutta	
RP	Rayleigh-Plessetova rovnice	
UKP	ultrazvukové kontrastní prostředky	
A	amplituda buzení	Pa
A_B	amplituda oscilace bubliny	-
C	rychlost zvuku na rozhraní bubliny	m.s^{-1}
c	rychlost zvuku v kapalině	m.s^{-1}
C_D	součinitel odporu	-
D	odporová síla	N
E	energie disipovaná během kolapsu	J
E	modul pružnosti v tahu	Pa
f	budicí frekvence	Hz
f_0	vlastní frekvence	Hz
G	modul pružnosti ve smyku	Pa
g	tíhové zrychlení	m.s^{-2}
H	měrná entalpie na rozhraní bubliny	J.kg^{-1}
h	měrná entalpie	J.kg^{-1}
l_{pm}	délka plynového měchýřku	m
M	přídavná (virtuální) hmotnost	kg
m	hmotnost	kg
Ma	Machovo číslo	-
n_b	počet bublin	-
P	tlak na rozhraní bubliny	Pa
p	tlak	Pa
p_a	amplituda budícího tlaku	Pa
p_g	parciální tlak plynu v bublině	Pa
p_v	tlak sytých par	Pa
R	poloměr bubliny	m
r	vzdálenost od středu bubliny	m
R_1	vnitřní poloměr bubliny s membránou	m
R_2	vnější poloměr bubliny s membránou	m
R_m	rychlost přenosu hmoty	$\text{kg.m}^{-3}.\text{s}^{-1}$
R_{pm}	průměr plynového měchýřku	m

Re	Reynoldsovo číslo	-
T	teplota	K
u	radiální rychlost	m.s ⁻¹
V	objem	m ³
v	rychlost	m.s ⁻¹
V _S	R ₂₀ ³ - R ₁₀ ³	m ³
W	práce plynu uvnitř bubliny	J
α	objemový zlomek fáze	-
δ_S	tloušťka membrány	m
μ	dynamická viskozita	Pa.s
ν	kinematická viskozita	m ² .s ⁻¹
ω	úhlová rychlost	s ⁻¹
ρ	hustota	kg.m ⁻³
σ	povrchové napětí	Pa
σ_1	povrchové napětí na poloměru R ₁	Pa
σ_2	povrchové napětí na poloměru R ₂	Pa
σ_k	kavitační číslo	-
τ	Rayleighův čas	s

Indexy

\dot{X}	derivace podle času
X _∞	daleko od bubliny
X ₀	počáteční stav
X _{abs}	absolutní
X _B	uvnitř bubliny
X _c	kritický
X _L	kapalina
X _{max}	maximální
X _{min}	minimální
X _m	směs
X _{rel}	relativní
X _S	membrána
X _t	turbulentní
X _v	pára

Konstanty

Molární objem plynu: $V_m = 22,4 \text{ l.mol}^{-1}$

Poissonova konstanta (mechanika): $\nu = 0,33$

Poissonova konstanta: $\kappa = c_v/c_p = 1,4$

Van der Waalsova konstanta: $b = 0,1727 \text{ l.mol}^{-1}$

SEZNAM OBRÁZKŮ

1.1	Schéma kulové bubliny v nekonečně rozlehlé kapalině	13
1.2	Detail povrchu kulové bubliny	14
2.1	Závislost Machova čísla při kolapsu bubliny na jejím poloměru.	17
2.2	Čas kolapsu bubliny pro Gilmorův, Herringův a RP model.	18
3.1	Plynové měchýřky (zvětšení 150 000×) <i>Anabaena flos-aquae</i> a <i>Halobacterium salinarum</i>	21
3.2	Závislost kritického tlaku na průměru plynového měchýřku	22
4.1	Oblast absolutní stability pro EE a IE metodu.	28
4.2	Oblast stability explicitních RK metod řádu 1–5	30
5.1	Průběh R a \dot{R} během kolapsu bubliny	34
5.2	Řešení rovnice (5.2)	35
5.3	Relativní chyba při řešení rovnice (5.2)	35
5.4	Relativní chyba při řešení rovnice (5.2) - detail	36
5.5	Odezva na skokové zvýšení tlaku. $R_0 = 5 \mu\text{m}$, $p_{g0} = 128\,080 \text{ Pa}$, $A = 100$. .	37
5.6	Odezva na skokové zvýšení tlaku - detail.	37
5.7	Porovnání RP rovnice a jejích modifikací při buzení bubliny vlastní frekvencí. .	38
5.8	Detail průběhu oscilace bubliny z obr. 5.7	39
5.9	Průběh oscilace bubliny při buzení nízkou frekvencí. $R_0 = 5 \mu\text{m}$, $p_a = 240 \text{ kPa}$, $f = f_0/1000 = 718,674 \text{ Hz}$	40
5.10	Tvary dle poměru budicí frekvence ku vlastní frekvenci.	41
5.11	Tvary dle poměru budicí frekvence ku vlastní frekvenci.	42
5.12	Oscilace bublin. $f = f_{0,5\mu\text{m}} = 7,187 \times 10^5 \text{ Hz}$	43
5.13	Oscilace bublin. $f = f_{0,25\mu\text{m}} = 1,328 \times 10^5 \text{ Hz}$, $f = f_{0,50\mu\text{m}} = 6,568 \times 10^4 \text{ Hz}$.	43
5.14	Oscilace bublin. $f = f_{0,100\mu\text{m}} = 3,266 \times 10^4 \text{ Hz}$	44
5.15	Podmínky uvnitř bublin. $p_a = 240 \text{ kPa}$, $f = f_{0,100\mu\text{m}} = 3,266 \times 10^4 \text{ Hz}$	45
5.16	Maximální hodnoty v závislosti na poměru f/f_0 . $p_a = 240 \text{ kPa}$	46
6.1	Geometrie Venturiho dýzy	47
6.2	Výpočetní síť a okrajové podmínky	48
6.3	Rozložení fází a statického tlaku pro $\sigma_k = 0,80$	51
6.4	Rozložení fází a statického tlaku pro $\sigma_k = 0,42$	52
6.5	Průběh tlaku na proudnicích	52
6.6	Průběh poloměru bublin při $\sigma_k = 0,42$ na proudnici $y_0 = 26 \text{ mm}$	53
6.7	Průběh poloměru bublin při $\sigma_k = 0,42$ na proudnici $y_0 = 0 \text{ mm}$	54
6.8	Teplota a tlak uvnitř bublin. $\sigma_k = 0,42$, $y_0 = 26 \text{ mm}$	54
6.9	Práce plynu a disipovaná energie bubliny. $R_0 = 100 \mu\text{m}$, $y_0 = 26 \text{ mm}$, $\sigma_k = 0,42$.	56
6.10	Porovnání proudnice kapaliny a vypočtené trajektorie bubliny	57
7.1	Kmitání plynového měchýřku sinice <i>Anabaena flos-aquae</i>	60
7.2	Plynový měchýřek sinice <i>Anabaena flos-aquae</i> při průchodu Venturiho dýzou. .	61

SEZNAM TABULEK

3.1	Kritický tlak a tlak uvnitř plynových měchýřků vybraných druhů sinic. . .	22
5.1	Vstupní parametry pro výpočet chování bubliny v proměnném tlakovém poli	33
5.2	Výpočtová náročnost metod při řešení rovnice (5.2)	35
5.3	Velikost rovnovážného poloměru pro různé A	36

5.4	Porovnání hodnot parametrů bubliny při výpočtu RP rovnicí a jejími modifikacemi. $R_0 = 5 \mu\text{m}$, $p_a = 240 \text{ kPa}$, $f = f_0 = 718,674 \text{ kHz}$	39
5.5	Výpočtová náročnost RP rovnice a jejích modifikací	40
5.6	Porovnání hodnot parametrů bubliny při výpočtu RP rovnicí a jejími modifikacemi. $R_0 = 5 \mu\text{m}$, $p_a = 240 \text{ kPa}$, $f = f_0/1000 = 718,674 \text{ Hz}$	40
5.7	Vlastní frekvence vybraných velikostí bublin a poměr mezi nimi	42
5.8	Maximální hodnoty z průběhů na obr. 5.15	44
6.1	Hodnoty průtoku a tlaku pro kavitační čísla.	47
6.2	Použité metody řešení	48
6.3	Vlastnosti vody a páry při CFD výpočtu	48
6.4	Minimální hodnoty statického tlaku	53
6.5	Místa kolapsu a minimální velikosti bublin	54
6.6	Maximální hodnoty R , $ \dot{R} $, p_B , T_B pro kolabující bubliny	55
6.7	Celková disipovaná energie E_{celk} (J) při $\sigma_k = 0,42$	55
7.1	Vlastnosti plynového měchýřku	59
7.2	Minimální a maximální hodnoty	60

SEZNAM PŘÍLOH

Příloha 1	Program pro výpočet bubliny v proměnném tlakovém poli	73
Příloha 2	Program pro výpočet bubliny při průchodu Venturiho dýzou	73
Příloha 3	Animace kavitačních bublin při průchodu Venturiho dýzou	73
Příloha 4	Kavitační bubliny při průchodu Venturiho dýzou	74

Příloha 1 Program pro výpočet bubliny v proměnném tlakovém poli

Program je uveden v elektronické příloze této práce.

Příloha 2 Program pro výpočet bubliny při průchodu Venturiho dýzou

Program je uveden v elektronické příloze této práce.

Příloha 3 Animace kavitačních bublin při průchodu Venturiho dýzou

Animace jsou uvedeny v elektronické příloze této práce.

Příloha 4 Kavitační bubliny při průchodu Venturiho dýzou

